Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ»

кафедра физики

И. Л. Шейнман, Ю. С. Черненко

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Лабораторная работа № 1-доп.

Санкт-Петербург, 2015

Цель работы: изучение закономерностей колебательного движения тела в условии гармонической вынуждающей силы; определение характеристик колебаний: собственной частоты, постоянной затухания и добротности.

Приборы и принадлежности: физический маятник; электромотор с регулируемой частотой вращения, секундомер.

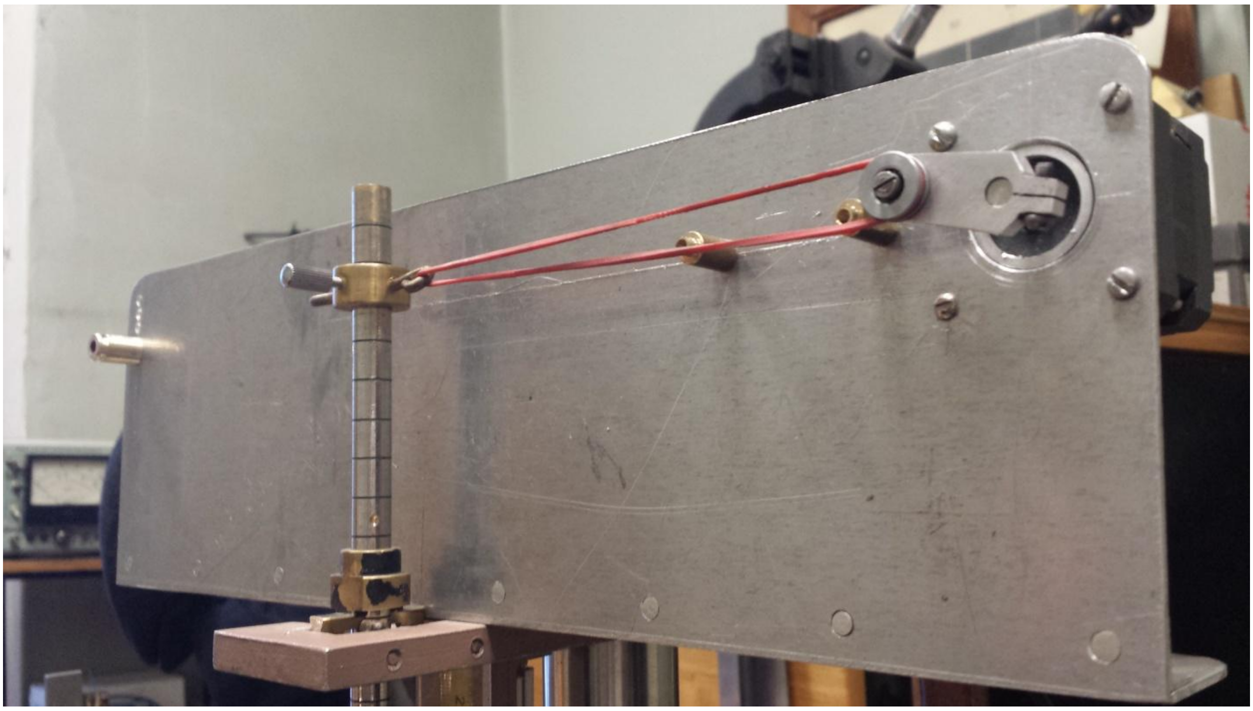

Рис. 1

Конструкция и схематическое изображение колебательной системы представлены на рис. 1 и 2. Физический маятник 1 представляет собой диск, закрепленный на стержне. Маятник подвешен на кронштейне с помощью легкой призмы 2, трение в которой мало. Верхний конец стержня маятника соединен с помощью эластичной резинки 3 с одной стороны с неподвижным креплением 4, с другой – с эксцентриком 5 электродвигателя 6. Система управления шаговым электродвигателем (рис. 3) позволяет регулировать частоту его вращения грубо с шагом 0.1 Гц и точно с шагом 0.02 Гц. В режим грубой настройки частоты (с шагом 0.1 Гц) система переходит при первом нажатии управляющей (красной) кнопки. При этом двигатель останавливается. Выбор частоты производится кнопками вверх (Δ) и вниз (∇). Повторное нажатие на управляющую кнопку переводит систему управления в режим тонкой подстройки частоты (с шагом 0.02 Гц). Третье нажатие на управляющую кнопку запускает вращение двигателя с выбранной частотой.

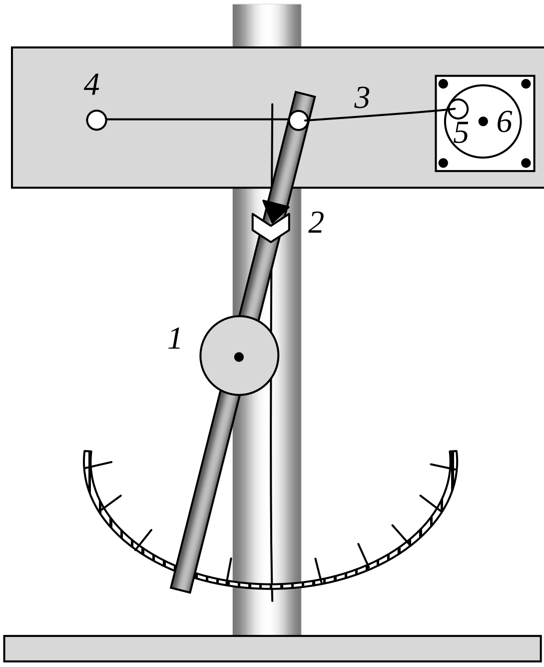

Рис. 2

Рис. 3

Исследуемые закономерности

Вынужденными колебаниями называются колебания, совершаемые под действием периодической внешней силы. Внешняя сила совершает работу над колебательной системой и обеспечивает приток энергии к ней. Периодическая внешняя сила может изменяться во времени по различным законам. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону с частотой ω.

Если свободные колебания колебательной системы происходят на частоте $\omega_{св}$, которая определяется параметрами системы, то установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте ω внешней силы.

В начальный момент действия силы в колебательной системе возбуждаются два процесса – вынужденные колебания на частоте ω и свободные колебания на частоте $\omega_{св}$. Но свободные колебания затухают из-за неизбежного наличия сил трения. Поэтому через некоторое время в колебательной системе остаются только стационарные колебания на частоте ω внешней вынуждающей силы. Время установления вынужденных колебаний по порядку величины равно времени затухания τ свободных колебаний в колебательной системе.

На исследуемый в работе физический маятник действуют моменты силы тяжести и силы упругости резинки, а также момент трения, который мы будем полагать пропорциональным угловой скорости движения маятника. Пренебрегая отклонением линии действия силы упругости от горизонтали, получим:

$$M = -mgl_c \sin\alpha + F_{\text{упр}} b \cos\alpha - r\alpha',$$

где m – масса маятника, l_c – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника, b – расстояние от точки подвеса до места прикрепления резинки, r – коэффициент сопротивления.

Сила упругости резинки подчиняется закону Гука и пропорциональна ее удлинению. Будем считать, что в начальный момент времени маятник и штифт шкива электромотора расположены вертикально и маятник находится в положении равновесия. Тогда

$$F_{\text{упр}} = k\left(x_1 - x\right) = k\left(R\sin(\omega t) - b\sin\alpha\right),$$

где R – радиус шатуна.

Запишем уравнение движения исследуемого в работе физического маятника:

$$M = I\alpha''.$$

Подставляя в него выражение для момента силы и силы упругости, получим уравнение вынужденных колебаний:

$$\alpha'' + \frac{r}{I}\alpha' + \frac{mgl_c + kb^2\cos\alpha}{I}\sin\alpha = \frac{kbR\cos\alpha}{I}\sin\omega t.$$

Если отклонение маятника от положения равновесия невелико, можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$. Тогда уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$\alpha'' + 2\beta\alpha' + \omega_0^2\alpha = f_0 \sin\omega t,$$

где обозначено $\beta = r/(2I)$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\left(mgl_c + kb^2\right)/I}$ – собственная круговая частота колебаний системы без затухания, $f_0 = kbR/I$.

Решением уравнения вынужденных колебаний является суперпозиция свободных затухающих колебаний физического маятника и вынужденного движения под действием вынуждающей силы

$$\alpha = Be^{-\beta t}\sin\left(\omega_{\text{св}}t + \varphi_0\right) + A\sin\left(\omega t + \varphi_1\right).$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – круговая частота свободных затухающих колебаний системы в отсутствие вынуждающей силы, φ_0 и φ_1 – начальные фазы свободной и вынужденной составляющих колебания. Величина $\tau = 1/\beta$ – время затухания колебаний, определяющее скорость убывания амплитуды $A(t)$ колебаний маятника, численно равное времени, за которое амплитуда колебаний убывает в e раз $A(\tau) = A_0/e$. Время затухания колебаний вычисляется по формуле $\tau = t_{1/2}/\ln 2$, где $t_{1/2}$ – время, за которое амплитуда колебаний убывает в 2 раза.

Амплитуда A и начальная фаза φ_1 вынужденного движения могут быть найдены как:

$$A = f_0 \Big/ \sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}\ .$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 2\beta\omega \Big/ \left(\omega^2 - \omega_0^2\right).$$

На очень низких частотах, когда $\omega \ll \omega_0$, движение верхнего конца маятника повторяет движение штифта шкива электромотора. При этом $x_1 = x$, и резинка остается практически недеформированной. Внешняя сила, приложенная к резинке, работы не совершает, т. к. модуль этой силы при $\omega \ll \omega_0$ стремится к нулю. При очень большой частоте вращения электромотора инерционные свойства маятника не дают ему возможности следовать за вынуждающей силой, и амплитуда колебаний становится малой.

Если частота ω внешней силы приближается к собственной частоте ω_0, возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом. Зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется резонансной характеристикой или резонансной кривой (рис. 4).

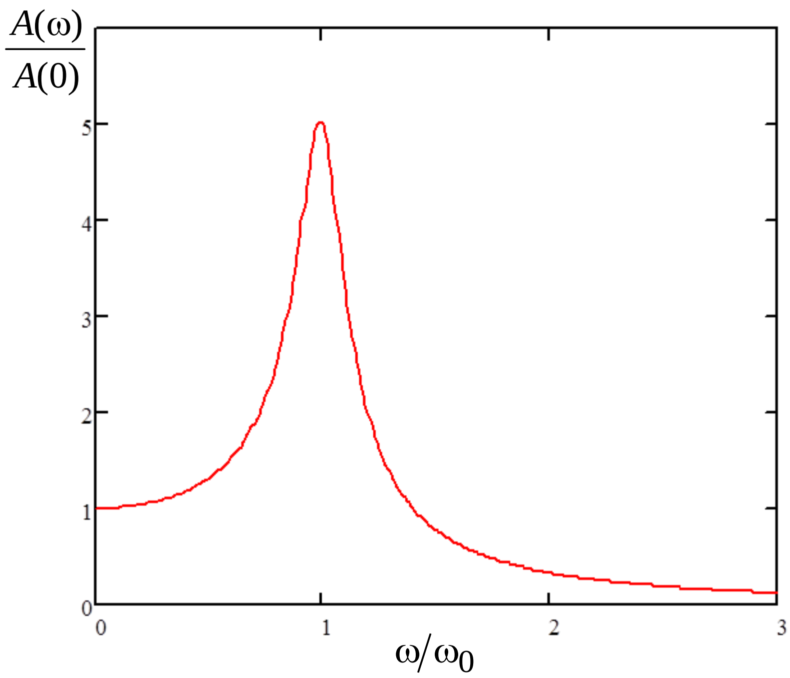

Рис. 4

При резонансе амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность Q колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе.

Частота резонанса определяется выражением $\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$. Резонансная амплитуда $A_p = f_0/(2\beta\omega_{св})$.

Квадрат отношения амплитуды на резонансе к амплитуде вынужденного колебания при частоте ω может быть найден как

$$\left(\frac{A_p}{A}\right)^2 = 1 + \frac{\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)^2}{4\beta^2\omega_{св}^2}.$$

Вблизи резонанса при малом затухании $\beta << 1$: $\left(\frac{A_p}{A}\right)^2 \approx 1 + \frac{\left(\omega - \omega_p\right)^2}{\beta^2}$,

где $\Delta\omega = \omega - \omega_p$. При отношении амплитуд $\frac{A_p}{A} = \sqrt{2}$ имеем $\Delta\omega = \omega - \omega_p = \beta$.

Отмеченный факт позволяет найти добротность колебательной системы Q, характеризующей способность системы сохранять энергию. Добротность определяется отношением запасенной системой энергии к потерям энергии за время $T/2\pi = 1/\omega$, и может быть найдена как $Q = \dfrac{\omega_р W}{P} = \dfrac{\omega_р}{2\beta}$. Обозначая частоты, на которых амплитуда колебаний в $\sqrt{2}$ раз меньше резонансной амплитуды за ω_1 и ω_2 получим, что $Q = \dfrac{\omega_р}{\Delta\omega} = \dfrac{\omega_р}{\omega_2 - \omega_1}$. Для нахождения частот ω_1 и ω_2 на уровне $A_0/\sqrt{2}$ проводят параллельную оси частот прямую. Затем точки пересечения прямой и резонансной кривой проецируют на ось частот.

Наряду с вынужденной составляющей происходит возбуждение свободной составляющей колебания. Его амплитуда B и начальная фаза φ_0 определяются начальными условиями. Рассмотрим начальный этап возбуждения, когда потери еще не успели заметно погасить свободную составляющую колебания. Полагая при $t = 0$ $\alpha = 0,\ \alpha' = 0$ и считая затухание малым $\beta << \omega,\ \beta << \omega_{св}$, получим систему:

$$\begin{cases} B\sin(\varphi_0) + A\sin(\varphi_1) = 0, \\ B\omega_{св}\cos(\varphi_0) + A\omega\cos(\varphi_1) = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид:

$$B = A\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{св}}\cos(\varphi_1)\right)^2 + \left(\sin(\varphi_1)\right)^2},\ \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega_{св}}{\omega}\operatorname{tg}\varphi_1.$$

С учетом подстановки A и φ_1:

$$B = \frac{\omega}{\omega_{св}}\frac{f_0\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{св}{}^2}}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2},\ \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\beta\omega_{св}}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}.$$

При малом затухании вдали от резонанса $\beta << \left|\omega - \omega_0\right|$ $A = \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $B = \dfrac{\omega}{\omega_{св}}A,\ \varphi_0 \approx \varphi_1 \approx 0$. Тогда $\alpha = Be^{-\beta t}\sin(\omega_{св}t) + A\sin(\omega t)$.

На низких частотах $\omega << \omega_{св}$ $B << A$, и определяющий вклад в колебание вносит вынужденная составляющая на частоте ω. На высоких частотах $\omega >> \omega_{св}$ $B >> A$ и в колебании преобладает свободная составляющая на частоте $\omega_{св}$.

Вблизи резонанса при $\omega = \omega_{св}$ получим $B = A$, $\varphi_0 = \varphi_1$ и $\alpha = A\left(1 + e^{-\beta t}\right)\sin\left(\omega_{св} t + \varphi_0\right)$.

Указания по проведению наблюдений

1. Подвесьте маятник на призме *2* (см. рис. 2). Отклоните маятник на угол, составляющий примерно 10°. Отпустите маятник и измерьте с помощью секундомера время, за которое маятник совершает $n = 10$ полных колебаний. Запишите время колебаний t в таблицу протокола наблюдений. Повторите эти измерения 5 раз. Запишите приборную погрешность измерения времени в протокол.
2. Измерьте с помощью секундомера время, за которое амплитуда свободных колебаний маятника убывает в 2 раза. Начальное отклонение маятника не должно превышать 20°. Запишите время колебаний $t_{1/2}$.
3. Включите электромотор. Снимите зависимость амплитуды колебаний маятника от частоты, изменяя частоту с шагом 0.1 Гц от 0.1 Гц до 1.9 Гц. Для установления стационарного режима вынужденных колебаний и затухания свободной составляющей измерение амплитуды на каждой выставленной частоте должно проводиться после прохождения не менее чем удвоенного времени затухания колебания $t_{1/2}$. Для сокращения времени переходного процесса можно слегка притормаживать вращение маятника пальцем. Запишите частоты и соответствующие им амплитуды колебаний.
4. Путем точной регулировки частоты (с точностью 0.02 Гц) определите и уточните резонансную частоту физического маятника.
5. Измерьте радиус шатуна R, расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника l_c, расстояние от точки подвеса до места прикрепления резинки b.

Задание по обработке результатов эксперимента

1. Рассчитайте период свободных затухающих $(T = t / n)$ колебаний маятника и его погрешность.
2. Определите частоту свободных затухающих колебаний маятника $\omega_{св}$.
3. Определите коэффициент затухания колебаний β_1 на основе времени $t_{1/2}$ уменьшения амплитуды колебания в 2 раза.
4. Определите резонансную частоту вынужденных колебаний маятника $\omega_р$.
5. Постройте зависимость амплитуды колебаний маятника A от частоты вынуждающей силы ω.
6. Определите добротность колебаний Q.
7. Определите коэффициент затухания колебаний β_2 на основе найденных добротности Q и резонансной частоты $\omega_р$.
8. Определите коэффициент затухания колебаний β_3 на основе известных резонансной частоте вынужденных колебаний маятника $\omega_р$ и частоте свободных затухающих колебаний маятника $\omega_{св}$.
9. Сопоставьте полученные значения коэффициентов затухания колебаний.
10. Определите собственную частоту колебательной системы ω_0 на основе найденных в пп. 4, 7 и 8 значений коэффициентов затухания и выражений для частот $\omega_р$ и $\omega_{св}$. Сопоставьте полученные значения.
11. Рассчитайте момент инерции физического маятника и коэффициент жесткости резинки.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими? Объясните смысл требования малости угловой амплитуды колебаний маятника.
2. Какой маятник называют физическим, а какой математическим? Что такое приведенная длина физического маятника? Как ее определить экспериментально?
3. Дайте определение центра масс системы тел.
4. Дайте определение моментов инерции материальной точки и составного тела.

5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Сформулируйте теорему Штейнера.
7. Одинаковы или различны угловые и линейные ускорения и скорости различных точек маятника в фиксированный момент времени при его колебаниях.
8. Какие законы используются для описания колебаний физического маятника?
9. Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний осциллятора и его решение и объясните физический смысл величин, входящих в это уравнение.
10. Покажите, что максимальные кинетическая и потенциальная энергии тела, колеблющегося по гармоническому закону, совпадают с его полной механической энергией.