

## РАБОТА 1

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

**Цель работы:** исследование конфигурации электростатического поля; построение эквипотенциалей и линий напряжённости для заданной формы электродов; приобретение навыков в применении теоремы Гаусса на примере определения ёмкости системы по экспериментально найденному распределению поля.

Приборы и принадлежности: пантограф с зондом, измерительная схема, лист чистой бумаги.

#### *Общие сведения*

Электростатическое поле определено, если в каждой точке пространства известны величина и направление вектора напряжённости  $\mathbf{E}$  или значение потенциала  $\varphi$  этого поля. В первом случае мы имеем дело с векторным представлением поля, во втором – со скалярным. Между этими представлениями существует связь, выражающаяся соотношением

$$\mathbf{E} = - \text{grad} \varphi. \quad (1.1)$$

В диэлектриках электростатическое поле характеризуется вектором электрического смещения (электрической индукции)  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ , который удовлетворяет теореме Гаусса:

$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = Q$ , где  $Q$  – суммарный сторонний заряд, заключённый в объёме, ограниченном

поверхностью  $S$ . Для однородного диэлектрика

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (1.2)$$

Электрическое поле потенциально, т.е. работа электрических сил по перемещению заряда не зависит от формы траектории; работа по замкнутому пути равна нулю. Математически это соответствует тому, что циркуляция вектора напряжённости электростатического поля также равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.2) и (1.3) дают исчерпывающее описание свойств электростатического поля. В данной работе рассматриваются две типичные задачи электростатики: определение  $\varphi$  и  $\mathbf{E}$  поля заданного распределения зарядов и вычисление ёмкости системы проводников.

Во многих случаях прямой расчёт электростатического поля заменяют его моделированием. Наиболее удобной моделью является электрическое поле в проводящей среде.

Если электроды, к которым приложена разность потенциалов, помещены в проводящую среду, то в межэлектродном пространстве возникает электрический ток, плотность  $\mathbf{j}$  которого связана с напряжённостью  $\mathbf{E}$  электрического поля, установившегося в среде, законом Ома:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (1.4)$$

где  $\gamma$  – удельная проводимость среды. Таким образом, линии тока (траектории носителей тока в проводящей среде) совпадают с линиями напряжённости электрического поля. В отсутствие сторонних сил линии тока будут перпендикулярны поверхностям равного потенциала, следовательно, соотношение (1.1) справедливо и для электрического поля в проводящей среде.

Продолжая аналогию, можно для электрического поля в проводящей среде найти

соотношение, подобное теореме Гаусса (1.2). Если не рассматривать перенос заряда сторонними силами, то из очевидного выражения

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

где  $I$  – ток, текущий от электрода, а  $S$  – замкнутая поверхность, охватывающая электрод, придём к соотношению

$$\oint_S \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} = I/\gamma,$$

подобному (1.2). Потенциальный характер электрического поля в проводящей среде иллюстрируется соотношением

$$\oint_L \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

которое легко доказать, вычисляя, например, циркуляцию вектора  $\mathbf{j}$  по замкнутому контуру  $L$ , расположенному на эквипотенциальной поверхности. Учитывая (1.4), получим подобное (1.3) выражение

$$\oint_L \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

На основании подобия свойств векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_j$  можно сделать вывод о возможности моделирования электростатического поля электрическим полем в проводящей среде, если соблюдается подобие формы и расположения электродов в пространстве. Масштабные коэффициенты проводящей модели вычисляются из сопоставления тока  $I$  и заряда  $Q$ , а также удельной проводимости и абсолютной диэлектрической проницаемости модели и электростатического аналога с учётом их размеров.

Электрическое поле проводящей модели определяют, измеряя распределение потенциалов в ней, после чего, используя (1.1), рассчитывают поле вектора напряжённости.

Емкость системы электродов можно определить прямым измерением сопротивления проводящей среды между электродами. Можно показать, что

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\gamma R},$$

где  $R$  – сопротивление проводящей среды. Можно также вычислить ёмкость электродов с использованием теоремы Гаусса, учитывая, что  $C = Q/U$ , где  $U$  – напряжение, равное разности потенциалов между электродами модели, получаем для определения ёмкости

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S}}{U}, \quad (1.5)$$

здесь поток вектора  $\mathbf{E}_j$  вычисляется по поверхности, охватывающей электрод моделируемой системы;  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость моделируемого диэлектрика. Соотношение (1.5) удобно тем, что в качестве поверхности  $S$  берётся определённая по модели эквипотенциальная поверхность.

### **Методика измерений**

В настоящей работе моделируется плоское поле, т.е. такое, потенциал и напряжённость которого зависят от двух координат. Плоским является, например, поле двухпроводной линии или же поле, образованное заряженной плоскостью и проводником. Для описания таких полей достаточно найти распределение в плоскости, перпендикулярной к электродам, тогда полная картина поля образуется смещением полученного сечения вдоль оси, перпендикулярной к этому сечению.

В экспериментальной установке воспроизводится сечение системы электродов, формирующих один из возможных вариантов плоского поля. В качестве проводящей среды используется проводящая бумага. Электрическая схема измерительной установки приведена на рис.1.1.

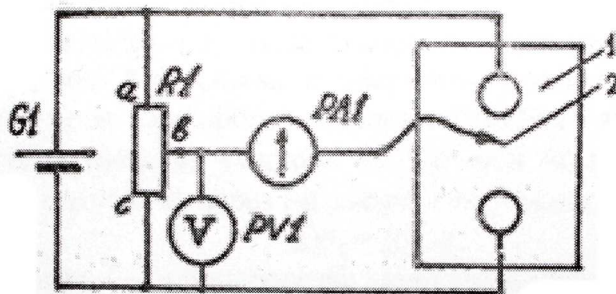


Рис.1

Схема представляет собой мост постоянного тока, одно плечо которого образовано сопротивлениями участков  $ab$  и  $bc$  потенциометра  $R1$  между его концевыми и подвижными контактами; другое плечо – сопротивлениями участков проводящей бумаги  $l$  между зондом  $2$  и электродами. В диагональ моста включён микроамперметр  $PA1$ . Ток в диагонали моста равен нулю, когда падение напряжения на участке  $bc$  резистора  $R1$  равно разности потенциалов между зондом и нижним по схеме электродом. Потенциал одного электрода принимается равным нулю. Перемещая зонд по листу проводящей бумаги, можно исследовать распределение потенциала на поверхности листа. С помощью пантографа координаты зонда переносятся на чистый лист бумаги, закреплённый под вторым плечом пантографа. Если отмечать точки, соответствующие одному и тому же падению напряжения на участке  $bc$  резистора  $R1$ , а затем менять его с заданным шагом  $\Delta\varphi$ , то в результате получится карта эквипотенциалей с шагом  $\Delta\varphi$ . Примерный вид карты поля около одного из электродов моделируемой системы приведён на рис.1.2.

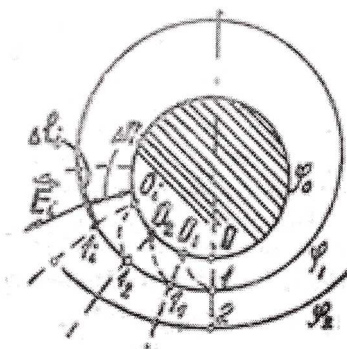


Рис.2

Для построения линий напряжённости (силовых линий) используется следующий приём. Вначале проводят линию  $00'$  (рис.1.2), соединяющую электроды, так, чтобы она совпадала с осью симметрии поля. От точки  $0$  вдоль контура электрода откладывают отрезок  $00_1$ , равный кратчайшему расстоянию  $01$  от точки  $0$  до эквипотенциали  $\varphi_1$ , и получают точку  $0_1$ . Затем от точки  $0_1$  откладывают отрезок  $0_10_2$ , равный кратчайшему расстоянию  $0_11_1$  от точки  $0_1$  до эквипотенциали  $\varphi_1$ , и получают точку  $0_2$  и т.д. Последней точкой на контуре электрода будет та, от которой откладывается отрезок, накрывающий точку  $0'$ , диаметрально противоположную точке  $0$ . Аналогичное построение проводят от точки  $0$  в другую сторону. Разделив указанным образом ближайшую к электроду эквипотенциаль, через полученные точки  $1_1, 1_2, \dots$  проводят перпендикулярные к ней отрезки до пересечения со следующей эквипотенциалью карты поля, полученные точки следует соединить плавными линиями, соблюдая их ортогональность эквипотенциальным

линиям в точках пересечения.

Для вычисления ёмкости, приходящейся на единицу длины рассматриваемых электродов, необходимо с помощью формулы (1.2) рассчитать поток вектора напряжённости через поверхность, охватывающую единицу длины электрода. Для этого следует представить, что ближайшая к электроду замкнутая эквипотенциаль является цилиндром, образующая которого перпендикулярна плоскости листа. Полагая напряжённость поля в пределах каждого из отрезков  $\Delta l_i$  примерно одинаковой, можно вычислить поток  $\Delta\Psi_i$  вектора  $\mathbf{E}_i$  через  $i$ -й элемент поверхности цилиндра:

$$\Delta\Psi_i = E_i h \Delta l_i,$$

где  $h_i$  – высота цилиндра,  $l_i$  – длина отрезка эквипотенциали, измеряемая по карте поля.  $E_i$  определяется по формуле

$$E_i = (\varphi_0 - \varphi_1) / \Delta r_i, \quad (1.6)$$

$\Delta r_i$  – расстояние между соответствующими отрезками электрода и ближайшей к нему эквипотенциальной; в скобках стоит разность потенциалов между электродом и ближайшей к нему эквипотенциальной. Заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности цилиндра, вычисляется по теореме Гаусса суммированием потоков через все элементы поверхности цилиндра:

$$Q = \varepsilon \varepsilon_0 \sum \Delta\Psi_i$$

Последнее соотношение используется для нахождения ёмкости единицы длины (погонной ёмкости) моделируемой системы:

$$C_h = C/h = [\varepsilon \varepsilon_0 (\varphi_0 - \varphi_1) / U] \sum (\Delta l_i / \Delta r_i) \quad (1.7)$$

#### **Указания по выполнению наблюдений и обработке результатов**

1. Закрепить на правой плате пантографа карту (лист чистой бумаги, равный по размеру проводящему листу). С помощью пантографа перенести на карту очертания электродов. Собрать схему и включить измерительную установку.

2. Измерить разность потенциалов между электродами. Для этого надо установить зонд на один из электродов и, вращая ручку потенциометра  $RI$ , добиться исчезновения тока через микроамперметр. Показания вольтметра  $PVI$  будут соответствовать потенциалу электрода. Аналогичную операцию проделать для другого электрода.

3. Сместить зонд на небольшое (5-7 мм) расстояние от электрода. Потенциометром установить нуль микроамперметра, при этом вольтметр покажет значение потенциала в данной точке поля. Перемещая зонд с сохранением нулевых показаний микроамперметра, перенести на карту 10-12 точек первой эквипотенциали (данная эквипотенциаль должна быть замкнутой).

Соединив полученные точки плавной линией, изобразить эквипотенциаль на карте, рядом записать значение потенциала.

4. Вращая ручку потенциометра  $RI$ , изменить показание вольтметра на  $\Delta\varphi$  (величина  $\Delta\varphi$  указана на панели установки) и, перемещая зонд по поверхности бумаги, найти и перенести на карту положения 10-12 точек, для которых сохраняются нулевые показания микроамперметра  $PAI$ . Подобным образом с шагом  $\Delta\varphi$  построить семейство эквипотенциалей, заполняющих всю поверхность листа. Чтобы быстро находить точки с одинаковым потенциалом, следует руководствоваться соображениями об ожидаемой конфигурации поля.

5. Построить на полученной карте силовые линии электрического поля. Вычислить по формуле (1.6) и построить (масштаб указать на карте) векторы напряжённости на каждом из отрезков первой эквипотенциали.

6. Вычислить по формуле (1.7) погонную ёмкость моделируемой системы (значение  $\varepsilon$  указано на панели установки).

7. Вывести аналитическое выражение для погонной ёмкости моделируемой системы,

рассчитать теоретическое значение ёмкости, используя данные измерений геометрических размеров моделируемой системы, и сравнить полученное значение с вычисленным по п.б.

8. Рассчитать значение плотности энергии электрического поля в пределах каждого из отрезков первой эквипотенциали ( $w = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$ ).

В отчёте обязательно дать теоретическое обоснование метода моделирования.

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Изобразите (качественно) картину электрического поля для конфигурации заряженных тел, заданной преподавателем.

2. Докажите, что силовые линии электрического поля и эквипотенциали ортогональны.

3. Найдите напряженность поля в точке, указанной преподавателем.

4. Объясните, почему проводящая среда может служить моделью для электростатического поля.

5. Напишите соотношение, связывающее напряженность электрического поля и его потенциал.

### ***Литература***

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982, т.2.

Лабораторный практикум по физике/Под ред. К.А.Барсукова и Ю.И.Уханова. – М.: Высшая школа, 1988.