Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет

Морозов В. В., Соботковский Б. Е., Черненко Ю. С., Шейнман И. Л.

Методы обработки результатов физического эксперимента

Санкт-Петербург 2016

Содержание

Практически все отрасли человеческой деятельности в той или иной степени связаны с измерениями, а для значительной категории научных сотрудников и инженеров измерения составляют основное содержание их работы. Настоящее пособие посвящено изложению основных правил и приемов обработки данных, получаемых при измерениях. Рассматриваемые вопросы требуют знания основ теории вероятностей и математической статистики. Пособие же ориентировано на студентов младших курсов вузов, которые начинают изучение вопросов, связанных с измерениями, на занятиях в физической лаборатории (в первом или втором семестре), обладая в это время знаниями по физике и математике в объёме школьного курса. В связи с этим, а также учитывая ограниченность времени, отводимого на изучение статистической обработки результатов эксперимента, в пособии рассмотрены лишь самые основные понятия и приёмы обработки данных, а изложение ведется на уровне, доступном студентам, начинающим обучение в вузе. При изложении материала рассмотрены некоторые основные понятия теории вероятностей и математической статистики, широко используемые в теории измерений.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Измерение. Классификация измерений

Измерение – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств и выражение полученного результата в принятых единицах.

Прямым называется измерение, при котором значение измеряемой величины непосредственно считывается со шкалы прибора, проградуированного в соответствующих единицах измерения. Уравнение прямого измерения имеет вид $y = cx$, где y – значение измеряемой величины; c – цена деления шкалы прибора в единицах измеряемой величины; x – отсчет по индикаторному устройству в делениях шкалы.

Примерами прямых измерений являются: измерение длины предмета с помощью штангенциркуля или микрометра, измерение силы тока амперметром, напряжения – вольтметром, температуры – термометром и др.

Косвенным называется измерение, результат которого определяют на основании прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью. Уравнение косвенного измерения имеет вид

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где y – искомая величина, являющаяся функцией величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, измеряемых прямым методом. Можно сказать, что косвенное измерение – это измерение, результат которого рассчитывается по формуле.

Примерами косвенных измерений являются: определение радиуса шара $R = D/2$, площади его поверхности $S = \pi D^2$ или объёма $V = \pi D^3/6$ по прямо измеренной величине – диаметру шара D.

Совместными называют производимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимости между ними. Уравнение совместных измерений имеет вид

$$y_i = f\,(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}\,; a, b, c, \ \ldots), \quad i = 1, 2, \ \ldots, N,$$

где y_i, x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni} – значения величин, измеренных одновременно (прямо или косвенно) в i-й измерительной операции; a, b, c, ... – неизвестные искомые величины. Если число уравнений превышает число неизвестных, то эти уравнения в отличие от обычной системы уравнений называют *условными*. Для решения полученной системы используют *метод наименьших квадратов*.

Примером совместных измерений может служить нахождение зависимости периода T колебаний математического маятника от его длины l: $T = al^n$, где a и n – неизвестные параметры, определяемые методом наименьших квадратов по прямым измерениям l и T.

Совокупными называют такие одновременно проводимые измерения нескольких одноименных величин, при которых значения искомых величин находят решением системы уравнений, получаемых при измерениях различных сочетаний этих величин.

Пример совокупных измерений – нахождение ёмкости двух конденсаторов по результатам измерений ёмкости каждого из них в отдельности, а также при последовательном и параллельном соединениях. Каждое из этих измерений выполняется с одним наблюдением, но в итоге для двух неизвестных будем иметь четыре уравнения:

$$C_1 = x_1, \qquad C_2 = x_2\,, \qquad C_1 + C_2 = x_3, \qquad C_1C_2/(C_1 + C_2) = x_4.$$

1.2. Классификация погрешностей измерения

Воздействие помех на процесс измерения приводит к тому, что результаты измерения всегда отличаются от истинного значения измеряемой величины и по этим результатам определить истинное значение нельзя. Разность между результатом измерения и истинным значением называется *истинной погрешностью* измерения. В силу того что истинное значение неизвестно, неизвестной является и истинная погрешность.

Учитывая, что ни истинное значение физической величины, ни истинную погрешность в опыте определить невозможно, задачу нахождения истинного значения формулируют как задачу нахождения некоторого приближенного к нему значения с указанием диапазона возможных отклонений этого приближенного значения от истинного значения. Найденное в эксперименте приближенное значение измеряемой величины, называется *оценкой* физической величины. Оценка с указанием ее возможного интервала отклонения от истинного значения называется *результатом измерения*.

Погрешность измерения включает в себя множество различных составляющих, которые можно классифицировать по различным признакам. В настоящее время классификация погрешностей содержит около 30 видов. Измерения можно разделить по виду влияния на результаты – на *систематические и случайные*; по характеру изменения во времени – на *статические и динамические*; по источникам возникновения – на *методические, инструментальные, погрешности оператора*, которые, в свою очередь, могут быть как случайными, так и систематическими; по возможности выявления и исключения из результатов измерения – на *выявленные* и *невыявленные, устранимые и неустранимые, исключенные и неисключенные*; по характеру принадлежности (близости) результатов наблюдений к основной совокупности выделяют *грубые погрешности и промахи*.

Невыявленная погрешность всегда неустранима. Выявленная погрешность может быть как устранимой, так и неустранимой. Так, случайная погрешность, а также систематическая погрешность известной величины, но неизвестного знака, имеют определенные числовые значения, т. е. относятся к разряду выявленных. Тем не менее, они не могут быть устранены (исключены из результатов), т. е. являются неустранимыми.

Далее приведены определения основных видов погрешностей.

Систематическая погрешность – это составляющая погрешности измерения, которая остаётся постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях.

Одной из основных задач обработки результатов эксперимента является выявление, оценка величины и, по возможности, устранение всех систематических погрешностей. Изменяющиеся систематические погрешности выявляются легче постоянных. Для выявления постоянной систематической погрешности необходимо выполнить измерения хотя бы двумя различными способами или методами. Обнаруженные и оцененные систематические погрешности исключаются из результатов путем введения поправок.

В зависимости от причин возникновения систематические погрешности подразделяют на следующие виды:

1. Погрешности метода или модели, которые обычно называют *методическими погрешностями*, например: определение плотности вещества без учета имеющихся в нем примесей, использование формул, не совсем точно описывающих явление, и др.

2. *Погрешности* воздействия *внешних факторов*: внешних тепловых, радиационных, гравитационных, электрических и магнитных полей.

3. Погрешности, возникающие из-за неточности действий или личных качеств оператора (экспериментатора), называемые *личностными погрешностями*.

4. *Инструментальные (приборные, аппаратурные*) *погрешности*, обусловленные схемными, конструктивными и технологическими несовершенствами средств измерения, их состоянием в процессе эксплуатации. Например, смещение начала отсчета, неточность градуировки шкалы прибора, использование прибора вне допустимых пределов его эксплуатации, неправильное положение прибора и т. п. За исключением смещения начала отсчета, приборные погрешности относятся к разряду неустранимых погрешностей.

В общем случае систематическая погрешность обусловлена суммарным воздействием перечисленных факторов, многие из которых невозможно рассчитать, подавить или выявить в данном эксперименте. Самым простым способом выявления суммарной систематической погрешности было бы сопоставление результатов измерений, полученных с помощью серийного (рабочего) и более точного образцового приборов. Разность результатов измерений даст суммарную систематическую погрешность, вносимую серийным прибором в результат измерения. Однако такой способ выявления систематической погрешности является слишком дорогим. Поэтому на практике различные составляющие систематической погрешности пытаются устранить с помощью экспериментальных или математических приемов путем введения поправок в результаты наблюдений при условии, что погрешность данного вида по величине и знаку известна. После внесения поправок влияние систематической погрешности данного вида на результат и погрешность измерения устраняется полностью. Если же систематическая погрешность неизвестна, но имеет известные границы изменения, то её учитывают в результате измерения.

Случайная погрешность – это составляющая погрешности измерения, проявляющаяся в виде непредсказуемых отклонений от истинного значения физической величины, меняющихся от одного наблюдения к другому. Данная погрешность обусловлена влиянием на результаты измерения множества факторов, воздействие которых на каждое отдельное измерение невозможно учесть или заранее предсказать. Такими причинами могут быть перепады напряжения в сети, вибрация установки, изменения атмосферного давления, температуры, электрических, магнитных и радиационных полей, а также ошибки, связанные с действиями самого экспериментатора (неправильное считывание показаний приборов, различная скорость реакции и т. п.). Случайную погрешность нельзя исключить из результатов измерений, однако, пользуясь статистическими методами, можно учесть её влияние на оценку истинного значения измеряемой величины.

Грубая погрешность – погрешность измерения, значительно превышающая погрешности большинства результатов наблюдений. Такие погрешности могут возникать вследствие резкого изменения внешних условий эксперимента: внезапного изменения температуры, напряжения в сети и т. п. Грубые погрешности обнаруживают статистическими методами и соответствующие результаты измерений, как не отражающие закономерностей поведения измеряемой величины, исключают из рассмотрения.

Промах – это вид грубой погрешности, зависящий от наблюдателя и связанный с неправильным обращением со средствами измерений: неверными отсчетами показаний приборов, описками при записи результатов, невнимательностью экспериментатора, путаницей номеров образцов и т. п. Промахи обнаруживают нестатистическими методами и результаты наблюдений, содержащие промахи, как заведомо неправильные, исключают из рассмотрения.

Указанные составляющие, как правило, не зависят друг от друга, что допускает их раздельное рассмотрение.

Полная погрешность измерения, являющаяся суммой указанных составляющих, может быть представлена в абсолютном, относительном или нормированном виде.

Абсолютная погрешность – это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины. Наряду с абсолютной погрешностью часто используется термин *абсолютное значение погрешности*, под которым понимают значение погрешности без учета ее знака. Эти два понятия различны.

Относительная погрешность – это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения.

Приведенная погрешность – это погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерения (приборной погрешности) к некоторой постоянной величине, называемой *нормирующим значением* и имеющей размерность измеряемой величины. В качестве нормирующего множителя может выступать, например, максимальное значение шкалы прибора (верхний предел показаний прибора). Понятие приведенной погрешности относится только к средствам измерений.

Относительная и приведенная погрешности являются безразмерными величинами и, как правило, выражаются в процентах.

Одни составляющие погрешности могут быть устранены из результатов измерений, а другие – нет. Все виды неустранимых погрешностей вносят вклад в полную погрешность измерения, и для ее нахождения должны быть просуммированы по определенным правилам, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

2. ОБРАБОТКА ДАННЫХ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Случайное событие. Вероятность

Пусть при выполнении определенных условий происходит некоторое событие, которое будем называть "событием *A*". Каждый случай выполнения этих условий принято называть *опытом* или *испытанием*. Возможны три ситуации:

1. Событие A происходит всякий раз при осуществлении опыта или испытания. Такое событие называется *достоверным*.

2. Событие не происходит никогда (ни в одном испытании). Такое событие называется *невозможным*.

3. В каждом данном испытании событие A может произойти, но может и не произойти, причем точно указать, в каком испытании оно произойдет, а в каком – нет, заранее невозможно. Такое событие называют *случайным*, исход испытания также является случайным.

Предсказание исхода того или иного испытания (произойдёт или не произойдет событие A в данном испытании) основывается на накопленном опыте. Для ситуаций *1* и *2* можно дать точное предсказание исхода будущего испытания. В ситуации *3* предсказание можно сделать лишь грубо ("в среднем"), указав, что событие может произойти лишь в такой-то доле от общего числа испытаний.

Несмотря на случайность исходов отдельных испытаний, при многократном их повторении мы можем наблюдать вполне определенные средние результаты. Тенденция стремления результатов испытаний к некоторому общему среднему результату при увеличении числа испытаний получила название *статистической устойчивости,* существование которой основывается на предшествующем опыте или интуиции. Классическим примером являются опыты с подбрасыванием монеты. Выпадение герба при падении монеты в разных сериях испытаний происходит в числе испытаний, близком к половине общего их числа в серии. При увеличении числа испытаний в серии число выпадений герба всё больше приближается к половине общего числа испытаний в серии, т. е. к некоторому неслучайному показателю.

Пусть в N испытаниях событие A произошло $n(A)$ раз. Отношение $n(A)/N$ называется *относительной частотой* или просто *частотой* появления события A. Если провести несколько серий опытов по N испытаний в каждой, то отношение $n(A)/N$ будет различным для разных серий, но при увеличении N это отношение будет стремиться к некоторому постоянному числу, называемому *вероятностью* появления события A:

$$n(A)/N \to P(A) \text{ при } N \to \infty \, .$$

Вероятность является объективной характеристикой и математическим выражением возможности появления случайного события A в каждом отдельном испытании. Нетрудно видеть, что вероятность принимает значения, лежащие в интервале от нуля до единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$, причем для достоверного события $P(A) = 1$ ($n(A) = N$), для невозможного события $P(A) = 0$ ($n(A) = 0$).

Физическое содержание события A может быть различным. Таким событием может быть выпадение герба при бросании монеты, рождение мальчика или девочки, превышение температурой воздуха заданного уровня в течение выбранных суток и др.

В большинстве случаев имеют место не отдельные события, а их комбинации, в связи с чем встают вопросы определения вероятностей этих комбинаций на основе знания вероятностей отдельных событий или других комбинаций этих же событий.

Если появление одного из событий делает невозможным появление других в данном испытании, то такие события называются *несовместимыми*. Если в каждом испытании должно обязательно произойти одно из событий некоторой группы, то эти события образуют *полную группу*. Если события к тому же несовместимы, то они образуют *полную группу несовместимых событий*.

Пусть события $A_1, ..., A_N$ образуют полную группу и несовместимы. Тогда появление любого из этих событий в данном испытании есть достоверное событие, вероятность которого равна единице, то есть

$$P(A_1 \text{ или } A_2, \ldots \text{ или } A_N) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) = 1.$$

Если же вероятности этих событий равны между собой, то

$$\sum_{k=1}^{N} P(A_k) = NP(A_k) = 1, \text{ откуда } P(A_k) = 1/N.$$

Классическим примером рассмотренной ситуации является выпадение некоторого числа очков при бросании игральной кости, представляющей собой кубик с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, нанесенными на гранях. Выпадение каждой грани является случайным событием. Если кубик считать идеальным, то вероятности выпадения всех граней одинаковы. Выпадение одной из них исключает выпадение других, и события, состоящие в выпадении 1...6 очков, образуют полную группу несовместимых событий. Вероятность выпасть любому из указанных чисел равна 1/6. Вероятность получить число очков не менее 3 при одном бросании равна вероятности выпадения чисел 3, 4, 5, 6, т. е. (1/6)4 = 2/3.

2.2. Случайная величина. Генеральная совокупность и выборка

Пусть некоторая величина X в ряде испытаний может принимать различные числовые значения. Если значение величины X в каждом данном испытании не может быть указано заранее (непредсказуемо), то величина X называется *случайной величиной*.

Если случайная величина может принимать бесконечное множество значений, причем эти значения могут быть сколь угодно близки друг к другу, то такая величина называется *непрерывной случайной величиной*. Если же случайная величина может принимать лишь дискретные значения, то она называется *дискретной случайной величиной*.

Факт принятия величиной заранее заданного значения для дискретной случайной величины или попадания в заданный интервал для непрерывной случайной величины в конкретном испытании является случайным событием, происходящим с определенной вероятностью.

Охарактеризовать случайную величину можно при помощи закона распределения. Под *законом распределения* случайной величины понимается соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями принятия этих значений. Это соответствие может быть задано в виде таблицы, графика или математической формулы.

В основе любых измерений лежат прямые измерения, в ходе которых находят некоторое числовое значение физической величины. Каждая отдельная измерительная операция (отсчет, замер) называется *наблюдением,* а получаемое при этом значение физической величины – *результатом наблюдения*. В связи с тем, что результат отдельного наблюдения включает в себя неизвестные погрешности, для решения поставленной выше задачи нахождения оценки значения физической величины в процессе измерения проводят *серию наблюдений*. Получаемые в серии результаты наблюдений подвержены как систематическим, так и случайным отклонениям от истинного значения физической величины. Такие заранее непредсказуемые в каждом данном наблюдении результаты представляют собой случайную величину. Многократное повторное проведение опыта позволяет установить статистические закономерности, которым удовлетворяет данная случайная величина, и найти результат измерения.

При каждом наблюдении мы получаем некоторое возможное значение физической величины. Всё множество значений, которые измеряемая величина может принимать в эксперименте, называется *генеральной совокупностью*. Это множество может быть как конечным, так и бесконечным. Большинство физических величин имеют непрерывный набор возможных значений, множество которых является бесконечным. Говорят, что такие величины имеют генеральную совокупность бесконечного объёма.

Генеральная совокупность несет полную информацию об измеряемой величине и позволяет (в отсутствие систематических погрешностей), несмотря на случайный характер результатов отдельных наблюдений, найти истинное значение x_0 физической величины. В случае физической величины с непрерывным набором значений для нахождения истинного значения, в качестве которого принимают среднее значение, определенное на основе генеральной совокупности результатов наблюдений, необходимо провести бесконечное число наблюдений, что невозможно. Поэтому на практике ограничиваются конечным числом наблюдений (от единиц до нескольких десятков). Полученный при этом ряд значений физической величины: x_1, x_2, ..., x_N называют *выборкой из генеральной совокупности* или просто *выборкой*. Число N результатов наблюдений в выборке называют *объёмом выборки.*

Результаты наблюдений, входящие в выборку, можно упорядочить, т. е. расположить их в порядке возрастания или убывания: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_N$. Полученную выборку называют упорядоченной или *ранжированной*. Величина $R = x_{\max} - x_{\min}$ называется *размахом выборки*.

2.3. Гистограмма. Эмпирическое распределение результатов наблюдений

Чтобы получить представление о законе распределения измеряемой величины, экспериментальные данные группируют. Для этого весь интервал значений величины от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (рис. 2.1) разбивают на несколько равных отрезков, называемых интервалами группировки данных, шириной Δ и центрами x_k, так что k-й интервал ($k = 1, 2, \ldots, K$) имеет границы ($x_k - \Delta / 2$,

$x_k + \Delta / 2$). Далее распределяют значения x_i по интервалам. Число точек N_k, оказавшихся внутри k-го интервала, даёт число попаданий измеряемой величины в этот интервал. Общее число точек, оказавшихся внутри всех интервалов разбиения, должно быть равно полному числу N результатов наблюдений в исходной выборке.

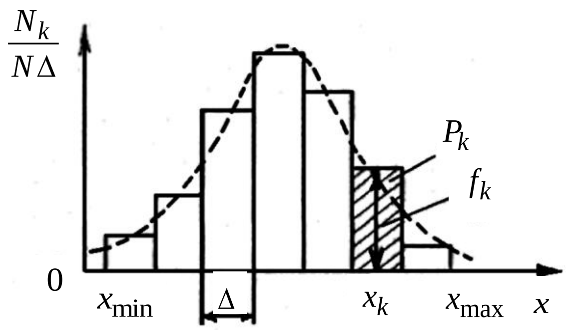

Рис. 2.1. Гистограмма

Над каждым интервалом Δ_k строится прямоугольник высотой $f_k = N_k / (N\,\Delta)$. Совокупность таких прямоугольников называется *гистограммой* (рис. 2.1).

При построении гистограмм интервалы разбиения не следует брать очень большими или очень маленькими. Так, в первом случае прямоугольники на гистограмме будут иметь примерно одинаковую высоту, а во втором – могут появиться интервалы, в которые не попадет ни одного значения случайной величины. Чтобы этого не происходило, придерживаются следующих правил. Число интервалов группировки данных K рассчитывают по формуле $K = \sqrt{N}$, где N – объем выборки. Если число K получается дробным, то его округляют до ближайшего меньшего целого. Ширину интервалов берут равной $\Delta = (x_{max} - x_{min})/K$.

Высоты и площади прямоугольников на гистограмме имеют следующий смысл. Учитывая, что согласно 2.2 относительные частоты $P_k = N_k/N$ приближенно равны вероятности попадания результата каждого отдельного наблюдения в данный интервал, высота каждого прямоугольника на гистограмме $f_k = N_k/N\Delta = P_k/\Delta$ есть вероятность, приходящаяся на единицу длины интервала разбиения или *плотность вероятности* попадания случайной величины в интервал Δ_k с центром в точке x_k.

Площадь каждого прямоугольника $f_k\Delta = N_k/N = P_k$ есть вероятность попадания результата в интервал Δ_k. Сумма площадей прямоугольников, основания которых находятся внутри некоторого интервала $[x_1, x_2]$, равна вероятности для каждого отдельного наугад взятого результата попасть в этот интервал.

Нетрудно убедиться, что сумма площадей всех прямоугольников равна единице:

$$\sum_{k=1}^{K} P_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k} N_k = \frac{N}{N} = 1. \qquad (2.1)$$

Это означает, что попадание произвольного результата наблюдения в какой-либо из интервалов разбиения в промежутке (x_{max}, x_{min}) есть достоверное событие.

Из рис. 2.1 видно, что результаты наблюдений распределены около некоторого значения, абсцисса которого соответствует центру самого высокого прямоугольника на гистограмме. По обе стороны данного прямоугольника расположены прямоугольники убывающих высот и площадей. Учитывая, что высоты прямоугольников f_k имеют смысл плотности вероятности попадания измеряемой величины в интервал Δ_k, можно сказать, что гистограмма дает представление о законе распределения измеряемой величины.

Зная координаты центров интервалов разбиения x_k и количества попаданий N_k значений измеряемой величины в интервалы, можно найти среднее значение измеряемой величины $\bar{x}$ и величину S_x^2, характеризующую разброс результатов наблюдений около среднего значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum N_k x_k = \sum P_k x_k, \qquad (2.2)$$

$$S_x^2 = \frac{\sum N_k (x_k - \bar{x})^2}{N-1} \approx \sum P_k (x_k - \bar{x})^2, \qquad (2.3)$$

где при большом объеме выборки $N-1 \approx N$. Величину S_x^2 называют *эмпирической дисперсией*, а $S_x = \sqrt{S_x^2}$ – *среднеквадратическим отклонением* результатов наблюдений от среднего (СКО x). Параметр S_x характеризует ширину распределения значений случайной величины около среднего значения.

Если число наблюдений взять очень большим ($N \to \infty$), т. е. от выборки перейти к генеральной совокупности, а ширины интервалов разбиения очень маленькими, то ломаная огибающая гистограммы перейдет в плавную кривую, называемую *функцией плотности распределения вероятности измеряемой величины*, которую будем обозначать $f(x)$. В этом случае суммы (2.1)–(2.3) заменятся интегралами, а вероятности P_k – вероятностями $dP(x)$

попадания случайной величины в интервал $(x, x+dx)$. Если случайная величина распределена в интервале (a, b) (заметим, что границы интервала могут быть и бесконечными: $a=-\infty,\ b=\infty$), то выражения (2.1)–(2.3) будут иметь вид

$$\int_a^b dP(x) = \int_a^b f(x)dx = 1, \tag{2.4}$$

$$\bar{x} = \int_a^b x dP(x) = \int_a^b x f(x)dx, \tag{2.5}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\bar{x})^2 dP(x) = \int_a^b (x-\bar{x})^2 f(x)dx, \tag{2.6}$$

где $f(x) = dP(x)/dx$ есть плотность вероятности распределения случайной величины или просто плотность вероятности; $\bar{x}$, σ^2 – генеральные среднее и дисперсия, величина $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ называется *стандартным отклонением*.

Равенство (2.4) называют *условием нормировки* функции плотности вероятности. Это условие требует, чтобы площадь под графиком функции вероятности всегда была равна единице.

2.4. Результат измерения. Доверительный интервал

Задачей эксперимента является нахождение истинного значения x_0 физической величины, в качестве которого принимают среднее значение генеральной совокупности X результатов наблюдений. Однако, в связи с тем, что количество наблюдений в выборке конечно, в опыте находят некоторое приближенное к x_0 значение $\bar{x}$, называемое *оценкой истинного значения*, и указывают интервал, который накрывает истинное значение x_0 с заданной вероятностью P. Этот интервал называют *доверительным интервалом*, а вероятность P – *доверительной вероятностью*.

В качестве оценки истинного значения согласно (2.2) выбирают среднее арифметическое результатов наблюдений в выборке

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}, \tag{2.7}$$

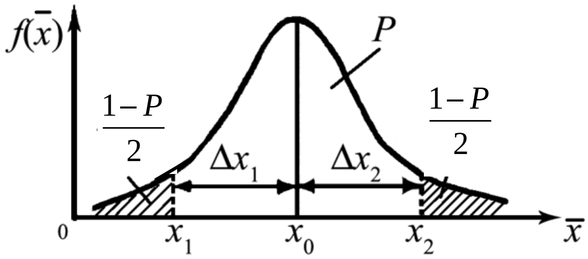

Рис. 2.2. Нахождение доверительного интервала

которое называют *выборочным средним*. Среднее $\bar{x}$ также является случайной величиной, и если повторить опыт по его нахождению несколько раз, то получим выборку средних *X*: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$, которые также будут отличаться друг от друга случайным образом, однако разброс средних значений будет заметно меньше разброса результатов отдельных наблюдений в каждой выборке.

Для нахождения доверительного интервала необходимо знать распределение средних значений $f(\bar{x})$ около x_0. Зная вид $f(\bar{x})$, можно построить интервал, в который истинное значение x_0 попадает с вероятностью *P*. Для этого на оси абсцисс (рис. 2.2) находят точки x_1 и x_2 такие, чтобы площади под графиком $f(\bar{x})$ слева от x_1 и справа от x_2 равнялись бы одной и той же величине $(1-P)/2$. Тогда площадь под графиком $f(\bar{x})$ в интервале (x_1, x_2) будет равна значению вероятности *P*, и для произвольного полученного в опыте среднего значения можно написать: $x_1 < \bar{x} < x_2$ с вероятностью *P*:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0-\Delta x_1}^{x_0+\Delta x_2} f(x)dx. \qquad (2.8)$$

Границы интервала можно также записать в виде $x_1 = x_0 - \Delta x_1$, $x_2 = x_0 + \Delta x_2$. Если распределение $f(\bar{x})$ симметрично, то $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. Величину Δx в этом случае называют *случайной доверительной погрешностью* результата измерения.

2.5. Нормальное или гауссовское распределение

Одним из часто встречающихся на практике распределений является *нормальный* или *гауссовский* закон. Ему подчиняются физические величины, случайность которых обусловлена действием множества независимых (или слабо зависимых) малых аддитивных факторов, результат воздействия каждого из которых мал по сравнению с их суммарным воздействием. Плотность распределения вероятности нормального закона имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/\left(2\sigma_x^2\right)}, \qquad (2.9)$$

где x – случайное значение величины X. Параметр x_0 определяет центр распределения, а σ_x – форму и ширину кривой плотности распределения (рис. 2.3). Множитель $\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} = f(x_0)$ перед экспонентой, определяющий высоту гауссовской кривой, выбран таким образом, чтобы было выполнено условие нормировки (2.4).

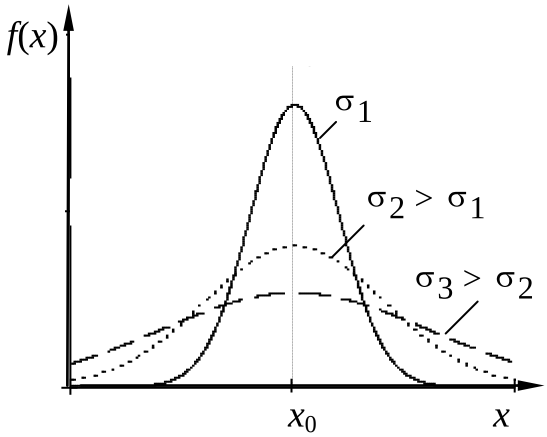

Рис. 2.3. Нормальное распределение

Поскольку Гауссово распределение симметрично относительно x_0, согласно (2.8) вероятность того, что случайное значение x величины X, распределенной по нормальному закону, попадет в заданный интервал (x_1, x_2), будет определяться выражением

$$P(x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} e^{-(x-x_0)^2/\left(2\sigma_x^2\right)} dx\,. \qquad (2.10)$$

Вводя обозначение $u = (x - x_0)/\sigma_x$, называемую *стандартизованной переменной*, (2.10) можно записать в виде

$$P(-t_P < u < t_P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-t_P}^{t_P} e^{-u^2/2} du\,, \qquad (2.11)$$

где t_P – коэффициенты, определяющие ширину интервала в единицах параметра нормального распределения σ_x: $\Delta x = t_P\sigma_x$. Вероятности P попадания u в интервал ($-t_P$, t_P) можно найти, вычислив интеграл (2.11) численно для различных значений ширины интервала t_P. И обратно, каждой заранее заданной вероятности P будет соответствовать свое конкретное значение коэффициента t_P, зависящее от выбора доверительной вероятности P. Если значения коэффициентов t_P найдены, то от переменной u можно вернуться к переменной x. Тогда из неравенства $-t_P < u = (x - x_0)/\sigma_x < t_P$ получим $x_0 - t_P\sigma_x < x < x_0 + t_P\sigma_x$ с вероятностью P.

Можно показать (см. 2.6), что если значения x величины X распределены по нормальному закону, то и рассчитываемые по ним средние значения $\bar{x}$

также распределены по нормальному закону с центром в точке x_0 и шириной распределения $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x \big/ \sqrt{N}$, где N – объем выборок, по которым рассчитываются $\bar{x}$. Распределение средних будет описываться формулой (2.9), в которой x заменено на $\bar{x}$, а σ_x на $\sigma_{\bar{x}}$.

Если средние значения $\bar{x}$ распределены по нормальному закону, то задача нахождения доверительного интервала сводится к нахождению доверительного интервала $(-t_P, t_P)$ для стандартизованной переменной $u = (\bar{x} - x_0)/\sigma_{\bar{x}}$ и переходу к доверительному интервалу переменной $\bar{x}$. В результате получим, что границы интервала, в который случайное значение $\bar{x}$ попадает с вероятностью P, определяются неравенством $x_0 - t_P\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < x_0 + t_P\sigma_{\bar{x}}$. Откуда для границ доверительного интервала x_0 получаем $\bar{x} - t_P\sigma_{\bar{x}} < x_0 < \bar{x} + t_P\sigma_{\bar{x}}$, где t_P – коэффициенты, соответствующие заданной вероятности P. Это неравенство принято записывать в виде символического равенства

$$x = x_0 = \bar{x} \pm \Delta x \text{ с вероятностью } P, \qquad (2.12)$$

где $\Delta x = t_P\sigma_{\bar{x}} = t_P\,\sigma_x \big/ \sqrt{N}$ – случайная доверительная погрешность результата измерения.

2.6. Выборочные дисперсия и среднеквадратичное отклонение

В реальном эксперименте имеет место выборка конечного объема, а не генеральная совокупность, подчиняющаяся нормальному закону. Поэтому чтобы воспользоваться формулой (2.12) для определения случайной доверительной погрешности результата измерения, необходимо найти оценку параметра σ_x и новые коэффициенты $t_{P,\,N}$ (которые в этом случае будут зависеть от количества измерений N), соответствующие выборке конечного объема.

Таким наилучшим приближением, или оценкой стандартного отклонения σ_x, согласно (2.3) является величина

$$S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \Big/ (N-1)}\,, \qquad (2.13)$$

называемая *выборочным среднеквадратичным отклонением* (СКО x) результата наблюдения от среднего. Квадрат СКО $S_x{}^2$ называют *выборочной дисперсией результата наблюдения.*

Для нахождения оценки параметра $\sigma_{\overline{x}}$ рассмотрим случайную величину Z, представляющую собой сумму случайных величин X и $У$. Тогда среднее значение Z имеет вид

$$\overline{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i + y_i) = \overline{x} + \overline{y},$$

а выборочная дисперсия

$$S_z^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \overline{z})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \overline{x}) + (y_i - \overline{y})]^2$$

может быть представлена в виде

$$S_z{}^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right].$$

Если X и Y независимы друг от друга, то их отклонения от средних значений $(x_i - \overline{x})$ и $(y_i - \overline{y})$ также независимы. Учитывая, что среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних значений сомножителей, получим, что последняя сумма равна нулю, и $S_z{}^2 = S_x{}^2 + S_y{}^2$, т. е. дисперсии независимых случайных величин складываются линейно, а выборочные среднеквадратичные отклонения складываются квадратично.

Если $Z = aX + bY$, то, повторив рассуждения, получим

$$S_z{}^2 = aS_x{}^2 + bS_y{}^2.$$

В случае суммы более двух случайных величин

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_NX_N = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i,$$

$$S_z^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 S_{xi}^2. \qquad (2.14)$$

Для нахождения погрешности результата измерения представляет интерес не СКО результата отдельного наблюдения S_x, а СКО среднего значения $S_{\overline{x}}$. Взаимосвязь между параметрами S_x и $S_{\overline{x}}$ можно найти, если учесть, что среднее значение есть сумма N независимых случайных величин, дисперсии которых одинаковы

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{N}x_1 + \frac{1}{N}x_2 + \ldots + \frac{1}{N}x_N .$$

Тогда, используя формулу (2.14), в которой $a_i = 1/N$, с учетом $S_{xi}^2 = S_x^2$ получим для дисперсии параметра $\bar{x}$:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2}(S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2 + \ldots + S_{x_N}^2) = \frac{NS_x^2}{N^2} = \frac{S_x^2}{N} .$$

Отсюда следует, что СКО $\bar{x}$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} . \tag{2.15}$$

Параметр $S_{\bar{x}}$, называемый выборочным *среднеквадратичным отклонением среднего* (СКО $\bar{x}$), является наилучшим приближением к параметру $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$.

Если СКО $\bar{x}$ найдено согласно (2.15), то, как было впервые предсказано английским математиком В. С. Госсетом, писавшим свои работы под псевдонимом Стьюдент, и впоследствии доказано Р. А. Фишером, новая стандартизованная переменная $u = \left(\bar{x} - x_0\right) / S_{\bar{x}}$ имеет функцию плотности распределения вероятности $f(u,\ N)$, зависящую от объема выборки N. Вероятность того, что величина u попадет в заданный интервал $(-t_{P,\,N};\ t_{P,\,N})$, будет

$$P(-t_{P,\,N} < u < t_{P,\,N}) = \int_{-t_{P,\,N}}^{t_{P,\,N}} f(u,N)du ,$$

откуда случайную доверительную погрешность результата измерения необходимо рассчитывать по формуле

$\Delta x = t_{P,\,N} S_{\bar{x}}$, с вероятностью P,

где $t_{P,\,N}$ – коэффициенты Стьюдента, зависящие от доверительной вероятности P и объема выборки N, по которой рассчитываются $\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}$. При больших значениях $N \to \infty$ (на практике при $N \geq 20$) параметры $\bar{x}$ и S_x, рассчитываемые по выборке конечного объема, переходят в параметры x_0 и σ_x нормального распределения, а коэффициенты Стьюдента $t_{P,N}$ – в коэффициенты t_P для нормального закона.

Для проверочной оценки случайной доверительной погрешности результата измерения её расчет можно также производить по формуле $\Delta x = \beta_{P,N} R$, где $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах выборки.

Значения коэффициентов $t_{P,N}$ и $\beta_{P,N}$ для данных значений доверительной вероятности и числа N наблюдений в выборке приведены в приложении. В математических справочниках, как правило, коэффициенты Стьюдента приводят в таблицах в виде $t_{P,\nu}$, где $\nu = N - 1$ называется *числом степеней свободы* выборки объема N.

Выбор конкретного значения доверительной вероятности определяется характером выполняемых измерений. При обычных измерениях достаточно ограничиться вероятностью 0.68 или 0.95 – им соответствуют значения t_P равные 1 и 2. Вероятность $P = 0.68$ является принятым в мировой практике уровнем доверительной вероятности, который не оговаривается специально в записи вида $x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}$. При выборе другого значения доверительной вероятности P_0 оно должно быть указано явным образом в записи: $x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x},\ P = P_0$. В технике по договоренности берут значение $P = 95$ %. Для измерений, к которым предъявляются высокие требования по надежности, следует использовать $P = 0.997$, которому соответствует $t_P = 3$ (так называемое «правило трех сигма»). При обработке результатов лабораторных работ рекомендуется применять доверительную вероятность $P = 95$ %.

Необходимо отметить, что при расчетах доверительной погрешности по Стьюденту результаты наблюдений должны принадлежать генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, что может быть проверено с помощью специальных статистических критериев. Для выполнимости этой процедуры выборка должна быть достаточно представительной (от 50 наблюдений и больше). Выборки малых объёмов ($N << 15$), которые имеют место в работах лабораторного физического практикума, на принадлежность нормальному распределению не проверяют.

2.7. Выявление грубых погрешностей

Среди результатов наблюдений в выборке значений измеряемой величины могут оказаться такие, которые сильно отличаются от остальных: это либо промахи, либо результаты, содержащие грубые погрешности.

Промахи (описки и т. п.) устраняют из таблицы наблюдений, не прибегая к каким-либо процедурам проверки, руководствуясь лишь здравым смыслом. Для выявления результатов, содержащих грубые погрешности, существуют различные статистические методы (критерии), в основе которых, как правило, лежит предположение о том, что результаты наблюдений принадлежат генеральной совокупности, элементы которой распределены по нормальному закону.

1. Рассмотрим сначала критерий, позволяющий по относительному расстоянию между крайним и ближайшим к нему соседним элементом упорядоченной выборки ($x_1 = x_{\min} \le x_2 \le \ldots \le x_N = x_{\max}$) заключить, содержит ли крайний элемент выборки грубую погрешность или нет. Критерий основывается на сравнении разностей вида $u_i = |x_{i+1} - x_i|$ с произведением $u_{P,\,N} R$, где $u_{P,\,N}$ – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа наблюдений N в выборке (см. приложение), $R = x_{\max} - x_{\min}$ – *размах выборки*. Если $u_i > u_{P,\,N} R$ при $i = 1$ или $i = N - 1$, то $x_{\min}$ или $x_{\max}$ представляет собой элемент выборки, содержащий грубую погрешность, и должен быть удален из таблицы результатов наблюдений.

Если $x_N = x_{\max}$ и $x_1 = x_{\min}$ не содержат грубой погрешности, то проверку на наличие в выборке элементов, содержащих грубую погрешность, прекращают. В противном случае проверку повторяют, сопоставляя элемент x_{N-1} с x_{N-2} и, если нужно, x_2 с x_3, и т. д.

В некоторых случаях выборка распадается на две или более отдельно отстоящие друг от друга подвыборки, т. е. не является связной. Такая ситуация может возникнуть, когда в процессе эксперимента скачкообразно изменились его условия, была сбита настройка аппаратуры, были выключены и повторно включены некоторые приборы и т. п. Критерий сопоставления соседних элементов упорядоченной выборки друг с другом можно использовать для проверки выборки на связность, проверяя условия $u_i > u_{P,\,N}$ при $i = 2$, …, $N - 2$. Если выборка не является связной, эксперимент нужно повторить.

Если разность между максимальным и минимальным значением выборки совпадает с ценой деления прибора и при этом выборка объема N сводится только к двум различным значениям, проверку выборки на связность не производят.

2. Другой критерий основывается на анализе отклонения наиболее отстоящего результата наблюдения $x_{\text{extr}}= (x_{\min}$ или $x_{\max})$ от среднего значения $\bar{x}$. Так, считается, что x_{extr} содержит грубую погрешность и его необходимо исключить из выборки, если $v = |x_{\text{extr}} - \bar{x}| > S_x\, v_{P,\,N}$, где S_x – среднеквадратическое отклонение результатов наблюдений; $v_{P,\,N}$ – коэффициенты, приведенные в приложении. Второй метод является более точным, но более трудоемким, поскольку при выявлении промаха его надо из выборки устранить и повторить процедуру вычисления среднего значения и среднеквадратического отклонения по новой выборке.

2.8. Систематическая погрешность. Класс точности прибора. Расчет границы полосы погрешностей

До сих пор в рассмотрении предполагалось, что результаты наблюдений не содержат систематических погрешностей. Тем не менее, этот вид погрешностей всегда присутствует в эксперименте.

Инструментальными (приборными, аппаратурными) погрешностями средств измерений называют такие, которые принадлежат данному средству измерений (СИ), определены при его испытаниях и занесены в его паспорт.

Теоретически погрешность СИ есть разница между значением величины, полученным при помощи этого средства, и истинным значением. Вместо неизвестного истинного значения на практике обычно используется действительное значение, полученное при помощи более точного СИ. По уровню точности СИ делят на рабочие (серийные), образцовые и эталонные. Для рабочего СИ более точным является образцовое, а для образцового – эталонное.

Инструментальные погрешности делят на основные и дополнительные. *Основная погрешность* – это погрешность СИ в нормальных условиях его применения, а *дополнительная* – в условиях, отличных от нормальных. *Нормальные* условия (температура, влажность, частота и напряжение питающей сети, положение прибора и др.) оговариваются в паспорте СИ и в инструкции по эксплуатации. Обычно нормальными считаются: температура (293 ± 5) К; атмосферное давление (100 ± 4) кПа; влажность (65 ± 15) %; напряжение сети питания 220 В ± 10 %.

Приборная погрешность зависит от условий и длительности эксплуатации СИ, и её значение в каждом данном измерении неизвестно, поэтому на практике обычно указывают интервал $(-\theta_x, \theta_x)$ возможных значений погрешности прибора или *полосу погрешностей*, которую определяют экспериментально не для данного прибора, а для партии приборов данной серии. Границу θ_x полосы погрешностей прибора называют *нормированным значением приборной погрешности* или *пределом допускаемой погрешности* данного СИ.

Измерительные приборы делят по точности на классы. Точность СИ – характеристика, отражающая близость его погрешности к нулю. Чем меньше погрешность, тем точнее СИ.

Класс точности – характеристика СИ, выраженная пределами его основной и дополнительной погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность. Класс точности указывается на шкале прибора. Его обозначение зависит от способа нормирования основной допускаемой погрешности прибора и обозначается числом из следующего ряда: $1\cdot10^n$; $1.5\cdot10^n$; $2\cdot10^n$; $2.5\cdot10^n$; $4\cdot10^n$; $5\cdot10^n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Обозначение имеет вид либо числа, заключенного в кружок, либо просто числа, либо двух чисел, разделенных косой чертой. Остановимся на этих случаях.

1. Класс точности, указанный в виде числа, заключенного в кружок γ, обозначает максимальную относительную погрешность результата измерения, выраженную в процентах $(\delta\theta_x = \gamma)$. Абсолютная погрешность в этом случае $\theta_x = \gamma x/100$, где x – отсчет физической величины по шкале прибора.

2. Если класс точности γ указан просто числом, то он равен максимальной погрешности прибора (границе погрешности), выраженной в процентах от максимального показания K шкалы прибора, по которой производится отсчет. В этом случае $\theta_x = \gamma K/100$, $\delta\theta_x = \theta_x/x = \gamma K/x$.

Если нулевая отметка находится на краю шкалы или выходит за её пределы, то нормирующее значение K принимается равным верхнему пределу диапазона измерений. Так, если амперметр имеет шкалу от 0 до 60 А или от 30 до 60 А, то $K = 60$ А. Если прибор имеет нулевую отметку не в начале, а в другой точке шкалы, то K равно полной протяженности шкалы, т. е. сумме модулей отрицательного и положительного пределов измерений. Например, для амперметра со шкалой от –30 до +60 А, $K = 60 + |-30| = 90$ А.

3. Класс точности может быть задан в виде $\gamma_н/\gamma_к$, где $\gamma_н$ и $\gamma_к$ – приведенные погрешности прибора в начале и в конце шкалы, выраженные в процентах. В этом случае

$$\delta\theta_x = \gamma_н + \gamma_к\,(K/x - 1)\,, \quad \theta_x = \delta\theta_x\, x/100,$$

где K – предел измерений; x – отсчет по шкале прибора.

4. Если класс точности аналогового (стрелочного) прибора не указан, то его максимальная погрешность θ_x принимается равной половине цены деления шкалы прибора. Обычно цена наименьшего деления такого прибора согласована с погрешностью самого прибора. Поэтому попытка считывания со шкалы долей минимального деления нецелесообразна и не приводит к уменьшению приборной погрешности.

5. Для цифрового измерительного прибора при неизвестном классе точности или паспортной формуле для расчета погрешности за оценку максимальной погрешности θ_x принимают единицу наименьшего разряда цифрового индикатора при однократном отсчете или единицу последнего стабильно горящего (немигающего) разряда при непрерывно проводимых измерениях.

2.9. Сложение случайной и систематической погрешностей. Полная погрешность измерения

Пусть результаты наблюдений наряду со случайной содержат и систематическую приборную погрешность θ, которую можно считать постоянной в течение времени проведения измерения, так как характеристики прибора за это время не успевают заметно измениться. Наблюдаемые в опыте результаты наблюдений будут при этом равны $x_i' = x_i + \theta$. Наличие постоянной погрешности, вносимой прибором в результаты наблюдений, приводит к смещению выборочного среднего

$$\overline{x'} = \frac{1}{N}\sum_i (x_i + \theta) = \frac{1}{N}\sum_i x_i + \frac{1}{N}\sum_i \theta = \bar{x} + \theta\,,$$

однако совершенно не влияет на случайную погрешность результата измерения $\Delta x = t_{P,\,N} S_{\bar{x}}$, или $\Delta x = \beta_{P,\,N} R$, так как разности, на основе которых рассчитываются СКО $\bar{x}$: $x_i' - \overline{x'} = (x_i + \theta) - (\bar{x} + \theta) = x_i - \bar{x}$, а также размах выборки $R = x'_{\max} - x'_{\min} = x_{\max} - x_{\min}$ не зависят от θ.

Смещение среднего значения и доверительного интервала может привести к тому, что истинное значение x_0 измеряемой величины окажется за пределами найденного доверительного интервала $\left(\overline{x'} - \Delta x,\ \overline{x'} + \Delta x\right)$, как это показано на рис. 2.4. Чтобы этого не произошло, необходимо расширить до-

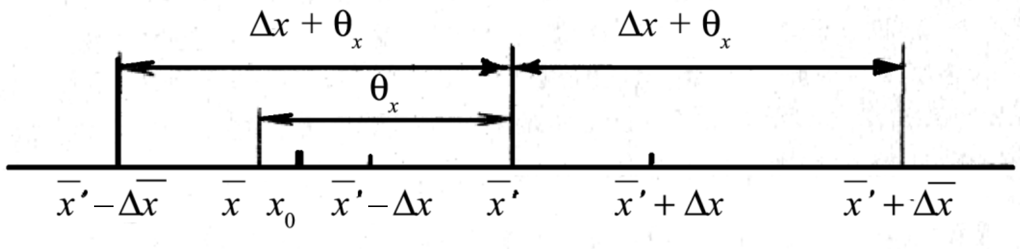

Рис. 2.4. К определению полной погрешности измерения

верительный интервал на величину верхней границы возможных значений погрешностей прибора θ_x. В этом случае $\bar{x} = \overline{x'} \pm \theta_x$ и результат измерения можно записать в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x = \overline{x'} \pm (\theta_x + \Delta x) = \overline{x'} \pm \Delta\bar{x}$, где $\Delta\bar{x} = \Delta x + \theta_x$ назовём *полной погрешностью результата измерения*. Новый доверительный интервал $\left(\overline{x'} - \Delta\bar{x},\ \overline{x'} + \Delta\bar{x}\right)$ обязательно накроет истинное значение x_0, так как $\theta_x \geq |\theta|$ (рис. 2.4). Отметим, что доверительная вероятность, соответствующая найденному таким образом доверительному интервалу, будет превышать доверительную вероятность, используемую для нахождения случайной составляющей погрешности измерения.

Указанный способ суммирования погрешностей дает максимальную верхнюю границу полной погрешности результата измерения. Однако маловероятно, что в данном эксперименте полная погрешность примет своё максимальное значение. Учитывая, что, как правило, на практике приборная погрешность как отдельного прибора (погрешности квантования и шкалы прибора), так и в серии приборов изменяется нерегулярным образом, оставаясь в границах $\pm\theta_x$, полная погрешность результата измерения с учетом неизвестности величины и знака θ_x лежит в пределах $|\Delta x - \theta_x| \leq \Delta\bar{x} \leq |\Delta x + \theta_x|$.

Сопоставляя приведенное выражение с неравенством треугольника $\left|\Delta x - \theta_x\right| \le \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2} \le \left|\Delta x + \theta_x\right|$, можно заключить, что в качестве разумной оценки полной погрешности результата измерения можно выбрать величину

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}\,. \qquad (2.16)$$

Строгое рассмотрение суммирования случайной и приборной погрешностей основано на построении совместной функции плотности распределения вероятности $f_\Sigma(x)$. Будем считать, что в интервале ($-\theta_x$, θ_x) все возможные значения приборной погрешности равновероятны, т. е. приборная погрешность распределена равномерно. Тогда совместная функция распределения $f_\Sigma(x)$ представляет собой свертку нормального $f(x)$ (или распределения Стьюдента для конечного числа наблюдений N) и равномерного $g(\theta)$ законов распределения:

$$f_\Sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) f(x-\theta) d\theta = \frac{1}{2\theta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\theta}^{\theta} e^{(x-\theta)^2 / \left(2\sigma^2\right)} d\theta .$$

Проводя вывод аналогично разд. 2.5, можно построить доверительный интервал для совместной функции распределения случайной и приборной погрешностей. Полученное выражение для полной погрешности результата измерения хорошо (с точностью до 5 %) аппроксимируется формулой (2.16).

В ГОСТ 16263–76 для определения границы доверительного интервала предложена формула

$$\Delta \bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta x, & \text{при } \theta_x / \Delta x < 0.8; \\ k\left(\Delta x + \theta_x\right), & \text{при } 0.8 \le \theta_x / \Delta x \le 8; \\ \theta_x, & \text{при } \theta_x / \Delta x > 8, \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

где k зависит от доверительной вероятности и числа наблюдений в выборке (для P = 95 % $0.7 \le k \le 0.8$). Выражение (2.17) приводит как к более громоздким расчетным соотношениям, так и к большим ошибкам при определении погрешностей (до 15 %). Учитывая это, рекомендуется оценивать границы доверительного интервала по формуле (2.16).

Итоговая запись результата измерения будет иметь вид

$$x = \overline{x'} \pm \Delta \bar{x} \text{ с вероятностью } P = P_0,$$

где P_0 – вероятность определения случайной составляющей погрешности измерения.

2.10. Округление результата измерения

Экскурсовод во время экскурсии по музею:
– Вы только подумайте: вот этому экспонату десять миллионов и семь лет!
– Простите, а откуда такая точность?!
– Ну как же, когда ровно 7 лет назад меня приняли на работу экскурсоводом, мой учитель, предыдущий экскурсовод, рассказывал, что этому экспонату ровно десять миллионов лет...

Погрешность результата рассчитывается по случайной выборке, и сама содержит погрешность. Новое измерение (новая выборка) даст новую погрешность, отличную от первой. Можно считать, что объективную информацию о величине погрешности несут лишь одна – две *значащие цифры* в её численном выражении. Остальные значащие цифры можно считать случайными. При этом под *значащими цифрами* числа понимают все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Результат измерения также содержит лишь ограниченное число верных значащих цифр, несущих информацию о величине этого результата. В связи с этим числовые значения результата и погрешности должны быть округлены. При округлении используют следующие правила (ГОСТ Р 8.736-2011):

1. Предварительно результат и погрешность записывают в нормализованном экспоненциальном виде: общий показатель степени выносят за скобку или заменяют соответствующей приставкой: микро, милли, кило, мега и др. Например,

$$x = 0.022 \pm 0.003 \text{ м} = (2.2 \pm 0.3)\cdot 10^{-3} \text{ м} = 2.2 \pm 0.3 \text{ см}.$$

Запрещены записи вида $x = 22\cdot 10^{-3} \pm 30\cdot 10^{-4}$ м или $x = 0.022 \pm 3\cdot 10^{-3}$ м. Показатель 10^1 не выносится.

2. Если результат будет в дальнейшем использован в вычислениях, то во избежание накопления погрешностей за счет округлений погрешность округляют до двух значащих цифр при любой первой. При промежуточных вычислениях величин S_x^2 и $S_{\bar{x}}^2$ (из которых впоследствии будет извлекаться квадратный корень для нахождения S_x и $S_{\bar{x}}$) следует сохранять не менее четырех значащих цифр.

3. Если результат измерения является окончательным и не будет использован в вычислениях других величин, то доверительную погрешность Δx

округляют до первой значащей цифры, если она больше 3, или до двух значащих цифр, если первая равна 1, 2 или 3.

4. Среднее значение x округляют до того разряда, которым оканчивается округленная погрешность Δx:

Неокругленный результат	Округленный результат
1237.2 ± 32	$(1.24 \pm 0.03)\cdot 10^{3}$
$(7.854 \pm 0.0476)\cdot 10^{-3}$	$(7.85 \pm 0.05)\cdot 10^{-3}$
83.2637 ± 0.0126	83.264 ± 0.013
2.48 ± 0.931	2.5 ± 0.9
2.48 ± 0.96	2.5 ± 1.0

Если погрешность округляется до двух значащих цифр, но вторая из них равна нулю, то этот нуль сохраняется, а в соответствующем ему разряде результата записывается получающаяся там значащая цифра: $x = 3.48 \pm 0.10$.

2.11. Алгоритм обработки данных прямых измерений по выборке

1. Устранить из выборки очевидные промахи (описки).
2. Из результатов измерений исключить известные систематические погрешности.
3. Упорядочить выборку в порядке возрастания ее элементов.
4. Провести проверку выборки на наличие грубых погрешностей и ее связность по размаху выборки: $x_{i+1}-x_i < U_{P,N}R$, $i=1\ldots N-1$ или только на наличие грубых погрешностей по отклонению наиболее отстоящего результата наблюдения x_1 от среднего значения $\bar{x}$: $|x_1 - \bar{x}| > v_{P,N}S_x$, где $S_x = \sqrt{\sum(\Delta x_i)^2/(N-1)}$.
5. Вычислить выборочное среднее $\bar{x}$.
6. Вычислить выборочное СКО среднего: $S_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{N}$.
7. Задаться доверительной вероятностью P в диапазоне 0.9…0.99. Как правило, для технических приложений (в том числе в данном курсе) принято выбирать $P = 0.95$.
8. Определить случайную погрешность $\Delta x = t_{P,N}S_{\bar{x}}$, где $t_{P,N}$ – коэффициент Стьюдента. Значения $t_{95\,\%,N}$ для некоторых N приведены в приложении.
9. Определить оценочное значение случайной погрешности по размаху выборки $\Delta x = \beta_{P,N}R$. Значения случайных погрешностей, рассчитанные разными способами, должны примерно совпадать.
10. Определить верхнюю границу погрешности прибора θ_x.

11. Рассчитать полную погрешность результата измерения: $\Delta\bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}$.

12. Вычислить относительную погрешность $\delta x = (\Delta x/\bar{x})\cdot 100$ %.

13. Округлить числовые значения полной погрешности и результата измерения.

14. Записать окончательный результат в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}, \quad P = P_0, \quad \delta_x = \Delta\bar{x}/\bar{x} \cdot 100\,\%.$$

15. Свести результаты расчетов в таблицу.

x_i	15.8	15.7	16.1	16.0	15.9	$\theta_x = 0.2$
$x\uparrow_i$	15.7	15.8	15.9	16.0	16.1	$\bar{x} = 15.9$, $R = x\uparrow_N - x\uparrow_1 = 0.4$
$U_i = x_{i+1} - x_i$	0.1	0.1	0.1	0.1		$U_i < U_{P,N}R = 0.64\cdot 0.4 = 0.256$
$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	–0.2	–0.1	0	0.1	0.2	$\sum\Delta x_i = 0$
$(\Delta x_i)^2$	0.04	0.01	0	0.01	0.04	$\sum(\Delta x_i)^2 = 0.1000$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum(\Delta\, x_i)^2 / N(N-1)} = 0.0707,$$

$$\Delta x = t_{P,\,N} S_{\bar{x}} = 2.78 \cdot 0.0707 = 0.198, \quad \Delta x_\beta = \beta_{P,\,N} R = 0.51 \cdot 0.4 = 0.204, \quad \Delta x \approx \Delta x_\beta,$$

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2} = \sqrt{0.198^2 + 0.2^2} = 0.2814, \qquad x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = 15.9 \pm 0.2814,$$

$$x = 15.9 \pm 0.3, \quad P = 95\,\%, N = 5.$$

2.12. Обработка сгруппированных (взвешенных) данных

Иногда в ряде экспериментов получается набор результатов независимых измерений (средние величины и погрешности) одной и той же постоянной физической величины. Естественно, результаты измерений, несколько отличаются друг от друга. В связи с этим возникает задача нахождения общего среднего и погрешности исследуемой физической величины.

Допустим, что рассматриваются n серий результатов независимых многократных измерений нормально распределенной величины x, в каждой из которых вычислены среднее $\bar{x}_i$ и дисперсия среднего $\sigma_i^2\,(i = 1, 2, ..., n)$, причем дисперсии полагаются известными точно. По этим данным необходимо найти общую оценку среднего $\bar{x}$ (общее среднее) и соответствующую дисперсию $\sigma_{\bar{x}}^2$. Для нормального распределения величин $\bar{x}_i$ вокруг $\bar{x}$ плотность вероятности:

$$f\left(\bar{x}_i\right)=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\bar{x}-\bar{x}_i\right)^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Введем функцию правдоподобия, равную плотности вероятности совместной реализации экспериментальных данных. Учитывая, что вероятность одновременного возникновения независимых друг от друга событий равна произведению вероятностей каждого из событий, получим:

$$L\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n\right)=f\left(\bar{x}_1\right)f\left(\bar{x}_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\bar{x}_n\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\bar{x}-\bar{x}_i\right)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

Прологарифмируем функцию правдоподобия:

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\sum_{i=1}^{n}\ln\sigma_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\bar{x}-\bar{x}_i\right)^2}{\sigma_i^2}.$$

Максимум функции правдоподобия, совпадающий с максимумом ее логарифма, соответствует наибольшей вероятности получить в эксперименте данные многократных измерений. Искомым аргументом функции правдоподобия является $\bar{x}$, поэтому ее максимум находят дифференцированием: $\partial(\ln L)/\partial\bar{x}=0$.

Полученное уравнение определяет наиболее вероятное значение искомой физической величины

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}_i}{\sigma_i^2}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}. \qquad (2.18)$$

Этот результат задает общее среднее всех $\bar{x}_i$, при вычислении которого учитывают точность каждого измерения, обратно пропорциональную дисперсии σ_i^2. Происходит как бы «взвешивание» всех результатов для определения их роли в общем среднем, которое по этой причине называют еще средним взвешенным.

Из (2.18) следует, что общее среднее может быть представлено как линейная комбинация независимых нормальных распределений величин $\bar{x}$, с весовыми множителями $k_i=\left(\sigma_i^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}\right)^{-1}$, в таком случае: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}k_i\bar{x}_i$.

Значит, общее среднее также распределено нормально, а его дисперсию $\sigma_{\bar{x}}^2$ находят через дисперсию σ_i^2:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1}. \tag{2.19}$$

Полученные выражения легко проверить для случая, когда величины $\bar{x}_i$ представляют собой результаты одного многократного измерения $\bar{x}_i = x_i$, а их дисперсии σ_i^2 относятся к общему распределению величины x и равны между собой: $\sigma_i^2 = \sigma_x^2$. Тогда $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$.

Вместо дисперсий σ_i^2, в выражениях (2.18) и (2.19) можно использовать погрешности окончательных результатов Δx_i^2, вычисленные при помощи коэффициентов Стьюдента для заданного значения доверительной вероятности (одинаковой для всех результатов). В этом случае (2.19) будет задавать верхнюю оценку погрешности общего среднего Δx для того же значения доверительной вероятности.

2.13. Статистический анализ результатов

При написании вывода к лабораторной работе полученные в результате статистической обработки результаты измерений должны быть проанализированы. Анализ часто проводится на основе сопоставления экспериментального и теоретического результатов, экспериментальных результатов, полученных различными способами, а также сопоставления полученных результатов с известными справочными или табличными данными. В связи с этим возникают задачи проверки гипотез о совпадении полученного в результате обработки доверительного интервала и известного значения величины, и совпадении двух результатов различных измерений.

1. Сопоставление экспериментального результата и известного значения величины.

Результатом статистической обработки наблюдений является доверительный интервал, который накрывает истинное значение x_0 (среднее значение генеральной совокупности X результатов наблюдений) с заданной доверительной вероятностью P_0: $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$, $P = P_0$. Если при сравнении теоретическое, справочное или табличное значение попадает в доверительный интервал полученного на основе статистической обработки результата измерения, статистическим выводом является заключение о совпадении сравниваемых величин с доверительной вероятностью P_0.

При несправедливости гипотезы о совпадении двух величин целесообразно определить относительную погрешность расхождения по формуле

$$\delta = \frac{|\bar{x} - x_0|}{\min(\bar{x}, x_0)} \cdot 100\,\% \,.$$

2. Сопоставление двух независимых средних значений.

Рассмотрим следующую часто встречающуюся ситуацию. Из двух независимых экспериментов получены две группы результатов многократных измерений $x_1, x_2, ..., x_{n1}$ и $y_1, y_2, ..., y_{n2}$ нормально распределенных величин x и y. После обработки найдены оценки средних и выборочных среднеквадратических отклонений для средних: $\bar{x}, S_{\bar{x}}^2$ и $\bar{y}, S_{\bar{y}}^2$. Проверяется гипотеза о том, что $\bar{x} = \bar{y}$.

Введем новую величину

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\bar{y}}^2} \,.$$

При справедливости равенства $\bar{x} = \bar{y}$ для генеральных совокупностей установлено, что при конечных значениях n_1 и n_2 распределение величины t близко к распределению Стьюдента, у которого

$$n = n_1 + n_2 - 2 \,.$$

При доверительной вероятности P гипотеза о совпадении $\bar{y}$ и $\bar{x}$ подтверждается, если $-t_{P,n} \le t \le t_{P,n}$, или

$$|\bar{x} - \bar{y}| \le t_{P,n} \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\bar{y}}^2} \,.$$

2.14. Контрольные вопросы

1. Что такое наблюдение и результат наблюдения?
2. Что такое выборка и объем выборки?
3. Что такое генеральная совокупность?
4. Что понимают под выборочным средним, под результатом измерения?

5. Как рассчитываются среднеквадратичное отклонение результата наблюдения и СКО среднего? Что эти величины характеризуют?

6. Какую выборку называют ранжированной (упорядоченной)? Имеет ли смысл проверять не крайние элементы упорядоченной выборки на промахи?

7. Как рассчитывают приборную погрешность при известном и неизвестном классах точности прибора? Что понимают под классом точности прибора?

8. Как определяются приборные погрешности, когда на приборе класс точности указан числом, обведенным в кружок? Как определяются приборные погрешности, когда на приборе класс точности указан просто числом?

9. Какие величины задаются произвольно экспериментатором в процессе расчета случайной погрешности?

10. Что произойдет с доверительным интервалом при выборе большей доверительной вероятности?

11. Как складываются друг с другом случайные и приборные погрешности?

12. Каким образом определяется погрешность сгруппированных данных?

3. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть некоторая величина f зависит от прямо измеряемых величин X, Y, Z, ..., причём вид этой зависимости $f = f(x, y, z, ...)$ известен. Ввиду того, что величины $x, y, z, ...$ измеряются с определенными погрешностями, величина f также обладает погрешностью, которую необходимо определить. Существует два метода определения погрешности величины f: метод переноса погрешностей, иначе называемый методом средних, и выборочный метод.

3.1. Метод переноса погрешностей

Метод переноса погрешностей (метод средних) применяется в том случае, когда измеренные прямо независимо друг от друга величины x, y, z, ..., являющиеся аргументами функции f, образуют выборки $\{x'\}$, $\{y'\}$, $\{z'\}$, ...

Отклонения результатов отдельных наблюдений x'_i, y'_i, z'_i, … от соответствующих истинных значений x_0, y_0, z_0, ... включают в себя как случайные, так и систематические составляющие. Случайные Δx, Δy, Δz, ... и приборные $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$, ... погрешности аргументов, определенные для одной и той же доверительной вероятности P_0, могут быть объединены в полные погрешности $\Delta\overline{x}$, $\Delta\overline{y}$, $\Delta\overline{z}$ на основе выражения (2.16). Полная погрешность величины f также состоит из двух компонент – случайной и систематической: $\Delta\overline{f} = \Delta f + \theta_f$. Составляющая Δf определяется случайными погрешностями аргументов, а θ_f – систематическими приборными.

Пусть в опыте получены выборки значений величин x, y, z, ... одинакового объема N. Тогда i-е значение функции $f_i' = f(x'_i, y'_i, z'_i)$, вычисленное при смещенных значениях ее аргументов $x'_i = x_i + \theta_{(x)}$, $y'_i = y_i + \theta_{(y)}$, …, можно представить в виде $f_i' = f(x_i', ...) = f(\overline{x'} + x_i' - \overline{x'}, ...) = f(\overline{x'} + \Delta x_i, ...)$, где $\overline{x'} = \overline{x} + \theta_{(x)}$, … – смещенные средние значения аргументов; $\Delta x_i = x_i' - \overline{x'} = x_i - \overline{x}, ...$ – случайные отклонения аргументов от их средних значений, не зависящие от приборных погрешностей $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$.

Воспользуемся выражением для полного дифференциала функции нескольких аргументов

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \dots .$$

Здесь частные производные функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, … могут быть найдены путем дифференцирования функции по выбранному аргументу при условии, что остальные независимые аргументы считаются постоянными. Приближенно заменяя бесконечно малые приращения (дифференциалы) функции и ее аргументов малыми конечными приращениями, получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \dots . \tag{3.1}$$

Тогда i-е значение величины f_i' в окрестности точки $\left(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}\right)$ можно записать в виде

$$f_i' = \overline{f}' + \Delta f_i = \overline{f}' + a_x \Delta x_i + a_y \Delta y_i + a_z \Delta z_i , \tag{3.2}$$

где $\overline{f}' = f\left(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}\right) = f\left(\overline{x} + \theta_{(x)}, \overline{y} + \theta_{(y)}, \overline{z} + \theta_{(z)}\right)$ – среднее значение функции, вычисленное при смещенных значениях ее аргументов при условии, что $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$ не меняются в процессе измерения, Δf_i – ее случайное приращение, $a_x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}}$, $a_y = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}}$, $a_z = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}}$ …– частные производные функции, вычисленные в точке $\left(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}\right)$.

Рассмотрим вычисление случайной погрешности косвенно определяемой величины f. Для этого вычислим дисперсию ее среднего значения. С учетом (3.2) получим

$$S_{\overline{f}}^2 = \frac{1}{N(N-1)}\sum \Delta f_i^2 = \frac{1}{N(N-1)}\sum (a_x \Delta x_i + a_y \Delta y_i + a_z \Delta z_i)^2 ,$$

или

$$S_{\overline{f}}^2 = \frac{1}{N(N-1)}\left(a_x^2 \sum \Delta x_i^2 + a_y^2 \sum \Delta y_i^2 + a_z^2 \sum \Delta z_i^2 + 2a_x a_y \sum \Delta x_i \Delta y_i + \dots\right).$$

Если аргументы функции случайны и независимы, то их отклонения от средних значений Δx_i, Δy_i, … также независимы. Учитывая, что среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних значений сомножителей, получаем, что суммы вида $\sum \Delta x_i \Delta y_i$ равны нулю. Тогда

$$S_{\overline{f}}^2 = a_x^2 S_{\overline{x}}^2 + a_y^2 S_{\overline{y}}^2 + a_z^2 S_{\overline{z}}^2, \tag{3.3}$$

где $S_{\overline{x}}^2, S_{\overline{y}}^2, S_{\overline{z}}^2$ – дисперсии средних значений аргументов функции. Умножив обе части (3.3) на квадрат коэффициента Стьюдента $t_{P,N}^2$, где N – объем выборок, по которым рассчитываются $\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}$ и $S_{\overline{x}}^2, S_{\overline{y}}^2, S_{\overline{z}}^2$, получим для случайной погрешности функции

$$\Delta f = \sqrt{\Delta f_x^2 + \Delta f_y^2 + \Delta f_z^2}, \tag{3.4}$$

где $\Delta f_x = a_x \Delta x$, $\Delta f_y = a_y \Delta y$, $\Delta f_z = a_z \Delta z$ – *частные случайные погрешности функции*.

Смещенное среднее значение функции в (3.2), используя выражение (3.1), можно выразить через ее истинное среднее значение

$$\overline{f'} = \overline{f} + \theta_{(f)} = \overline{f} + a_x \theta_{(x)} + a_y \theta_{(y)} + a_z \theta_{(z)}, \tag{3.5}$$

где $\overline{f} = f\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right)$ – истинное среднее значение функции; $\theta_{(f)}$ – приборная погрешность функции. Из (3.5) следует, что истинное среднее значение косвенно измеряемой величины будет равно $\overline{f} = \overline{f'} - \theta_{(f)} = = \overline{f'} - a_x \theta_{(x)} - a_y \theta_{(y)} - a_z \theta_{(z)}$, где ни величина, ни знак постоянных приборных погрешностей $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$ аргументов, а значит и $\theta_{(f)}$, неизвестны. Приборные погрешности $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$ представляют собой независимые случайные величины. Поэтому, как и в случае нахождения случайной погрешности, для приборной составляющей погрешности получим

$$\theta_{(f)} = \sqrt{\theta_{f(x)}^2 + \theta_{f(y)}^2 + \theta_{f(z)}^2},$$

где $\theta_{f(x)}, \theta_{f(y)}, \theta_{f(z)}$ – *частные приборные погрешности* косвенно измеряемой величины, откуда для *верхней границы приборной погрешности* величины f получим $\theta_f = \sqrt{\theta_{f_x}^2 + \theta_{f_y}^2 + \theta_{f_z}^2}$, где $\theta_{f_x} = |a_x| \theta_x$, $\theta_{f_y} = |a_y| \theta_y$, $\theta_{f_z} = |a_z| \theta_z$ представляют собой *верхние границы частных приборных по-*

грешностей косвенно измеряемой величины, а $\theta_x \geq |\theta_{(x)}|$, $\theta_y \geq |\theta_{(y)}|$, $\theta_z \geq |\theta_{(z)}|$ – верхние границы аргументов функции. Коэффициенты a_x, a_y, a_z имеют смысл весовых множителей, показывающих, с каким весом случайные $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ или приборные $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ погрешности аргументов функции входят, соответственно, в случайную и приборную погрешности функции. Производя суммирование случайной и систематической приборной погрешностей согласно (2.16) получим:

$$\Delta\overline{f} = \sqrt{\Delta f^2 + \theta_f^2} = \sqrt{\left(\Delta f_x^2 + \theta_{f_x}^2\right) + \left(\Delta f_y^2 + \theta_{f_y}^2\right) + \left(\Delta f_z^2 + \theta_{f_z}^2\right)},$$

откуда *полная погрешность* величины f будет определяться как

$$\Delta\overline{f} = \sqrt{a_x^2 \Delta\overline{x}^2 + a_y^2 \Delta\overline{y}^2 + a_z^2 \Delta\overline{z}^2}, \qquad (3.6)$$

где $\Delta\overline{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}$, $\Delta\overline{y} = \sqrt{\Delta y^2 + \theta_y^2}$, $\Delta\overline{z} = \sqrt{\Delta z^2 + \theta_z^2}$ – полные погрешности аргументов.

Результат косвенного измерения с учетом погрешности следует записать в виде

$$f = \overline{f} \pm \Delta\overline{f} \quad \text{с вероятностью } P = P_0, \;\; \delta f = \Delta\overline{f} / \overline{f},$$

где P_0 – вероятность определения случайной составляющей погрешности измерения; δf – относительная погрешность косвенно измеряемой величины f.

Числовые значения $\overline{f}$ и $\Delta\overline{f}$ округляются по тем же правилам, которые сформулированы для прямо измеряемых величин.

Замечание 1. Полученное выражение для полной погрешности величины $\Delta\overline{f}$ (3.6) остается справедливым также в случае различного объема выборок величин x, y, z, ..., являющихся аргументами функции f. При этом полные погрешности аргументов $\Delta\overline{x}$, $\Delta\overline{y}$, $\Delta\overline{z}$, входящие в $\Delta\overline{f}$, должны быть определены для одной и той же доверительной вероятности P_0.

Замечание 2. Если приборные погрешности аргументов функции не являются случайными и независимыми, например, приборная погрешность одного аргумента порождает приборную погрешность другого аргумента, то их необходимо складывать по модулю линейно $\theta_f = \left|\theta_{f_x}\right| + \left|\theta_{f_y}\right| + \left|\theta_{f_z}\right|$. В этом случае случайная (3.3) и приборная погрешности функции складываются (объединяются) в полную погрешность функции линейно $\Delta\bar{f} = \Delta f + \theta_f$.

Однако такая ситуация встречается на практике довольно редко. Она, например, может возникнуть в случае влияния работы одного прибора на показания другого. В большинстве же случаев значения аргументов функции измеряются разными приборами, взаимозависимость распределения приборных погрешностей которых ниоткуда не следует. Поэтому верхние границы частных приборных погрешностей аргументов функции будем складывать квадратично.

Замечание 3. Если функция f удобна для логарифмирования, т. е. представляет собой произведение нескольких выражений, формулы для нахождения погрешности могут быть приведены к более удобному виду. Операция логарифмирования, превращает произведение выражений в сумму логарифмов этих выражений, а производная суммы вычисляется значительно проще, чем производная произведения. Например,

$$\ln (ax^n/(y^m \mathrm{tg}\, x)) = \ln a + n \ln x - m \ln y - \ln \mathrm{tg}\, x.$$

В таком случае, используя тождество $(\ln f)' = f'/f$ и вводя новые весовые множители $b_x = \frac{a_x}{\bar{f}}, b_y = \frac{a_y}{\bar{f}}, b_z = \frac{a_z}{\bar{f}}$, получим

$$\Delta\bar{f} = \bar{f}\sqrt{\left(b_x\Delta\bar{x}\right)^2 + \left(b_y\Delta\bar{y}\right)^2 + \left(b_z\Delta\bar{z}\right)^2},$$

где $b_x = \left.\frac{d\ln f}{dx}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}$, $b_y = \left.\frac{d\ln f}{dy}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}$, $b_z = \left.\frac{d\ln f}{dz}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}$ в точке $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

3.2. Выборочный метод

Выборочный метод расчета погрешностей применяется в тех случаях, когда значения каждой из *совместно измеренных* величин x, y, z, ... не образуют выборок, но значения функции $f_i' = f\left(x_i', y_i', z_i', ...\right)$ образуют выборку, т. е. величина f является некоторой физической константой. Штрих у аргументов означает, что они содержат неизвестные постоянные приборные погрешности: $x_i' = x_i + \theta_{(x)i}$, $y_i' = y_i + \theta_{(y)i}$, $z_i' = z_i + \theta_{(z)i}$. Здесь учтено, что приборные погрешности измеряемых величин могут быть разными в разных опытах, поскольку зависят от отсчетов не образующих выборок величин x, y, z, ... по шкалам приборов.

Статистическая обработка полученных значений f_i' производится так же, как и в анализе данных прямых измерений, которые позволяют найти ее смещенное среднее значение и СКО среднего значения (либо размах выборки $R = f'_{\max} - f'_{\min}$):

$$\bar{f}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i', \qquad S_{\bar{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(f_i' - \bar{f}')^2 \Big/ \left[N(N-1)\right]}, \tag{3.7}$$

а затем вычислить ее случайную погрешность $\Delta f = t_{P,N} S_{\bar{f}}$, или $\Delta f = \beta_{P,N} R$.

Для определения приборной погрешности θ_f представим i-е смещенное значение величины f_i' в окрестности точки x_i, y_i, z_i, координаты которой не зависят от приборных погрешностей,

$$f_i' = f\left(x_i', y_i', z_i'\right) = f\left(x_i + \theta_{(x)i}, y_i + \theta_{(y)i}, z_i + \theta_{(z)i}\right)$$

в виде суммы истинного значения этой величины и малого конечного приращения, определяемого выражением (3.1):

$$f_i' = f_i + \theta_{(f)i} = f_i + a_{xi}\theta_{(x)i} + a_{yi}\theta_{(y)i} + a_{zi}\theta_{(z)i}, \tag{3.8}$$

где $f_i = f\left(x_i, y_i, z_i\right)$, $a_{xi} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i', y_i', z_i'}$, $a_{yi} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_i', y_i', z_i'}$, $a_{zi} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{x_i', y_i', z_i'}$.

Ввиду малости приборных погрешностей $\theta_{(x)i}, \theta_{(y)i}, \theta_{(z)i}$ значения производных в точке x_i, y_i, z_i можно считать совпадающими с их значениями в экспериментальной точке x_i', y_i', z_i'. Смещенное среднее значение косвенно определяемой величины с учетом (3.8) будет иметь вид

$$\bar{f}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_{(f)i} = \bar{f} + \theta_{(f)}, \tag{3.9}$$

где $\theta_{(f)} = \dfrac{1}{N}\sum\theta_{(f)i} = \dfrac{1}{N}\sum\left(a_{xi}\theta_{(x)i} + a_{yi}\theta_{(y)i} + a_{zi}\theta_{(z)i}\right)$ – приборная погрешность функции.

Согласно (3.9) несмещенное значение величины будет равно $f_i = f_i' - \theta_{(f)i}$, где ввиду неизвестности величин и знаков приборных погрешностей $\theta_{(x)i}$, $\theta_{(y)i}$, $\theta_{(z)i}$ приборная погрешность функции $\theta_{(f)}$ также неизвестна. Поэтому заменим приборную погрешность функции $\theta_{(f)}$ ее верхней границей $\theta_f \ge \left|\theta_{(f)}\right|$. Тогда

$$\theta_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_{f_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(|a_{xi}|\theta_{xi} + |a_{yi}|\theta_{yi} + |a_{zi}|\theta_{zi}\right), \qquad (3.10)$$

где θ_{xi}, θ_{yi}, θ_{zi} – верхние границы приборных погрешностей аргументов. Выражение для верхней границы приборной погрешности функции можно также записать в виде, удобном в ряде приложений: $\theta_f = \bar{a}_x\theta_x + \bar{a}_y\theta_y + \bar{a}_z\theta_z$, где $\bar{a}_x = \frac{1}{N}\sum|a_{xi}|$, $\bar{a}_y = \frac{1}{N}\sum|a_{yi}|$, $\bar{a}_z = \frac{1}{N}\sum|a_{zi}|$; $\theta_x = \max\theta_{xi}$, $\theta_y = \max\theta_{yi}$, $\theta_z = \max\theta_{zi}$ – наибольшие значения верхних границ приборных погрешностей аргументов в серии опытов.

Несмещенное среднее значение функции можно найти как $\bar{f} = \bar{f}' \pm \theta_f$. Тогда результат косвенного измерения с учетом его случайной погрешности можно записать в виде $f = \bar{f} \pm \Delta f = \bar{f}' \pm \left(\theta_f + \Delta f\right) = \bar{f}' \pm \Delta\bar{f}$, где $\Delta\bar{f} = \theta_f + \Delta f$ представляет собой полную погрешность функции.

При практических расчетах штрихи у аргументов функции и самой функции опускают.

Замечание 1. Выборочный метод допустимо использовать и в том случае, когда значения аргументов функции образуют выборки. Тем не менее, не рекомендуется применять выборочный метод при нахождении результата косвенного измерения в тех случаях, когда возможно применение метода переноса погрешностей, поскольку в выборочном методе случайная погрешность функции зависит от приборных погрешностей ее аргументов, что приводит к неоправданному дополнительному увеличению погрешности функции. Действительно, случайная погрешность функции в выборочном методе рассчитывается через разности вида

$$\Delta f_i = f_i' - \bar{f}' = \left(f_i - \bar{f}\right) + \left(a_{xi} - \bar{a}_x\right)\theta_{(x)} + \left(a_{yi} - \bar{a}_y\right)\theta_{(y)} + \left(a_{zi} - \bar{a}_z\right)\theta_{(z)},$$

в которых ввиду большого диапазона изменения значений аргументов $a_{xi} \ne \bar{a}_x$, $a_{yi} \ne \bar{a}_y$, $a_{zi} \ne \bar{a}_z$ и $\Delta f_i \ne f_i - \bar{f}$.

Замечание 2. Если функция f удобна для логарифмирования, формулы для нахождения погрешности могут быть упрощены. Используя тождество $(\ln f)' = f'/f$ и вводя новые весовые множители $b_{x_i} = a_{x_i} / f_i$, $b_{y_i} = a_{y_i} / f_i$, $b_{z_i} = a_{z_i} / f_i$, получим

$$\theta_{f_i} = f_i \Big(\left| b_x(x_i, y_i, z_i) \right| \theta_x + \left| b_y(x_i, y_i, z_i) \right| \theta_y + \left| b_z(x_i, y_i, z_i) \right| \theta_z \Big),$$

где θ_{f_i} и f_i – приборная погрешность и значение косвенно определяемой величины, соответствующие данному набору совместно измеренных значений аргументов,

$$b_x(x,y,z) = \frac{d \ln f(x,y,z)}{dx}, \; b_y(x,y,z) = \frac{d \ln f(x,y,z)}{dy}, \; b_z(x,y,z) = \frac{d \ln f(x,y,z)}{dz}.$$

Замечание 3. В том случае, когда функция f есть физическая константа, значение которой определяется через наборы совместно измеренных значений аргументов функции выборочным методом, ее значение можно найти методом наименьших квадратов (МНК), который будет рассмотрен далее.

3.3. Алгоритм обработки данных косвенных измерений методом переноса погрешностей

Данный метод используется в случае, когда каждая из величин x, y, z, представляющих собой аргументы функции, *измеряется независимо от остальных* в своей серии опытов, и эти величины образуют выборки (близки друг к другу). Число опытов в сериях, вообще говоря, не обязано быть одинаковым, требуется только неизменность условий для прямо измеряемой величины в своей серии, неизменность условий для f *во всех сериях* и взаимная независимость всех опытов.

1. По формулам прямых измерений определить величины $\bar{x}$, $\Delta\bar{x}$; $\bar{y}$, $\Delta\bar{y}$; $\bar{z}$, $\Delta\bar{z}$ (с учётом приборных погрешностей).
2. Рассчитать значение функции $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
3. Вычислить в точке $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ частные производные от функции

$$a_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, \; a_y = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, \; a_z = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}},$$

или, для легко логарифмируемой функции f, от ее логарифма

$$b_x = \left.\frac{d\ln f}{dx}\right|_{\bar{x},\,\bar{y},\,\bar{z}},\; b_y = \left.\frac{d\ln f}{dy}\right|_{\bar{x},\,\bar{y},\,\bar{z}},\; b_z = \left.\frac{d\ln f}{dz}\right|_{\bar{x},\,\bar{y},\,\bar{z}}.$$

4. По формуле переноса погрешностей вычислить полную погрешность функции $\Delta f = \sqrt{\left(a_x\Delta\bar{x}\right)^2 + \left(a_y\Delta\bar{y}\right)^2 + \left(a_z\Delta\bar{z}\right)^2}$ или по эквивалентной формуле для легко логарифмируемой функции: $\Delta f = \bar{f}\sqrt{\left(b_x\Delta\bar{x}\right)^2 + \left(b_y\Delta\bar{y}\right)^2 + \left(b_z\Delta\bar{z}\right)^2}$.

5. Записать результат измерения и округлить его.

6. Свести результаты обработки эксперимента в табл. 3.1.

Таблица 3.1

x_i						θ_x=
y_i						θ_y=
$x\uparrow_i$						$\bar{x}$= , $R_x = x\uparrow_N - x\uparrow_1$=
$x_{i+1} - x_i$						$U_{P,\,N}\,R_x$ =
$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$						$\Sigma\Delta x_i = 0$
$(\Delta x_i)^2$						$\Sigma(\Delta x_i)^2$=
$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum(\Delta x_i)^2 / N(N-1)} =$, $\Delta x = t_{P,N}S_{\bar{x}} =$, $\Delta\bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2} =$, $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} =$, $P =$ %, $N =$						
$y\uparrow_i$						$\bar{y}$ = , $R_y = y\uparrow_N - y\uparrow_1$=
$y_{i+1} - y_i$						$U_{P,\,N}\,R_y$ =
$\Delta y_i = y_i - \bar{y}$						$\Sigma\Delta y_i$ =0
$(\Delta y_i)^2$						$\Sigma(\Delta y_i)^2$ =
$S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum(\Delta y_i)^2 / N(N-1)} =$, $\Delta y = t_{P,\,N}S_{\bar{y}} =$, $\Delta\bar{y} = \sqrt{\Delta y^2 + \theta_y^2} =$, $y = \bar{y} \pm \Delta\bar{y} =$, $P =$ %, $N =$						
$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}) =$, $\Delta f = \sqrt{\left(a_x\Delta\bar{x}\right)^2 + \left(a_y\Delta\bar{y}\right)^2 + \left(a_z\Delta\bar{z}\right)^2} =$						
$f = \bar{f} \pm \Delta\bar{f} =$, $P =$ %, $N =$						

В качестве примера обработки данных косвенных измерений методом переноса погрешностей рассмотрим эксперимент по определению ускорения свободного падения g по 5 измерениям периода колебания математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ и его длины l. Выражая g через период колебаний и длину, получим: $g = 4\pi^2 l / T^2$. Результаты расчетов будут иметь вид табл. 3.2.

l_i , м	0.782	0.810	0.795	0.801	0.787	$\theta_l = 5 \cdot 10^{-4}$ м
T_i, с	1.776	1.798	1.789	1.794	1.780	$\theta_T = 10^{-4}$ с
$l\uparrow_i$	0.782	0.787	0.795	0.801	0.810	$R_l = l\uparrow_N - l\uparrow_1 = 0.028$, $\bar{l} = 0.795$
$l_{i+1}–l_i$	0.005	0.008	0.006	0.009		$U_{P,\,N}\, R_l =$ $= 0.64 \cdot 0.028 = 0.018$
$\Delta l_i = l_i - \bar{l}$	–0.013	0.015	0	0.006	–0.008	$\Sigma \Delta l_i = 0$
$(\Delta l_i)^2$	$169 \cdot 10^{-6}$	$225 \cdot 10^{-6}$	0	$36 \cdot 10^{-6}$	$64 \cdot 10^{-6}$	$\Sigma(\Delta l_i)^2 = 494 \cdot 10^{-6}$
$S_{\bar{l}} = \sqrt{\sum (\Delta\, l_i)^2 / N(N-1)} = 0.00497$, $\Delta l = t_{P,\,N} S_{\bar{l}} = 0.013915$, $\Delta \bar{l} = \sqrt{\Delta l^2 + \theta_l^2} = 0.013925$, $l = \bar{l} \pm \Delta \bar{l} = 0.795 \pm 0.014$ м, $P = 95\,\%$, $N = 5$						
$T\uparrow_i$	1.776	1.780	1.789	1.794	1.798	$R_T = T\uparrow_N - T\uparrow_1 = 0.022$, $\bar{T} = 1.7874$
$T_{i+1}–T_i$	0.004	0.009	0.005	0.004		$U_{P,\,N}\, R_T = 0.0141$
$\Delta T_i = T_i - \bar{T}$	–0.0114	0.0106	0.0016	0.0066	–0.0074	$\Sigma \Delta T_i = 0$
$(\Delta T_i)^2$	$1.300 \cdot 10^{-4}$	$1.124 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-6}$	$4.356 \cdot 10^{-5}$	$5.476 \cdot 10^{-5}$	$\Sigma(\Delta T_i)^2 = 3.432 \cdot 10^{-4}$
$S_{\bar{T}} = \sqrt{\sum (\Delta\, T_i)^2 / N(N-1)} = 0.004142$, $\Delta T = t_{P,\,N} S_{\bar{T}} = 0.011516$, $\Delta \bar{T} = \sqrt{\Delta T^2 + \theta_T^2} = 0.011517$, $T = \bar{T} \pm \Delta \bar{T} = 1.787 \pm 0.012$ с, $P = 95\,\%$, $N = 5$						

$$\bar{g} = g(\bar{l}, \bar{T}) = 4\pi^2 \bar{l} / \bar{T}^2 = 9.82388.$$

Для определения погрешности используем метод полного дифференциала.

$$a_l = \frac{dg}{dl} = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}, \qquad a_T = \frac{dg}{dT} = -2\frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3};$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(a_l \Delta \bar{l}\right)^2 + \left(a_T \Delta \bar{T}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\Delta \bar{l}\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3}\Delta \bar{T}\right)^2} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{l}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta \bar{T}}{\bar{T}}\right)^2} = 0.2136,$$

$$g = 9.8 \pm 0.2 \text{ м/с}^2, \ P = 95\,\%, N = 5.$$

3.4. Алгоритм обработки данных косвенных измерений выборочным методом

Выборочный метод применяется в том случае, если совместно измеренные значения аргументов функции x_i, y_i и z_i не образуют выборок, но можно создать выборку значений функции $\{f_i\}$.

1. По каждому набору совместно измеренных значений аргументов рассчитать значения функции $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$.

2. Обработать полученную выборку $\{f_i\}$ согласно алгоритму обработки данных прямых измерений, находя среднее значение $\overline{f}$ и случайную погрешность Δf функции.

3. Вывести выражения для частных производных от функции

$$a_x(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{dx},\ a_y(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{dy},\ a_z(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{dz}$$

или для легко логарифмируемой функции f – от ее логарифма

$$b_x(x,y,z) = \frac{d\ln f(x,y,z)}{dx},\ b_y(x,y,z) = \frac{d\ln f(x,y,z)}{dy},\ b_z(x,y,z) = \frac{d\ln f(x,y,z)}{dz}.$$

4. По каждому набору совместно измеренных значений аргументов и их приборных погрешностей рассчитать приборную погрешность функции

$$\theta_{f_i} = |a_x(x_i,y_i,z_i)|\theta_{xi} + |a_y(x_i,y_i,z_i)|\theta_{yi} + |a_z(x_i,y_i,z_i)|\theta_{zi},$$

предполагается, что приборные погрешности измеряемых величин могут быть разными в разных опытах или, если f имеет удобный для логарифмирования вид, по эквивалентной формуле

$$\theta_{f_i} = f_i\left(|b_x(x_i,y_i,z_i)|\theta_{xi} + |b_y(x_i,y_i,z_i)|\theta_{yi} + |b_z(x_i,y_i,z_i)|\theta_{zi}\right),$$

где f_i – соответствующее данному набору аргументов значение функции (не путать со строкой таблицы упорядоченных по возрастанию значений $f{\uparrow}_i$).

5. Если приборные погрешности аргументов одинаковы во всех опытах или при нахождении максимальных по всей серии опытов значений приборных погрешностей $\theta_x = \max\theta_{xi}$, $\theta_y = \max\theta_{yi}$, $\theta_z = \max\theta_{zi}$, для определения приборной погрешности величины f можно использовать выражение

$$\theta_f = \overline{a}_x\theta_x + \overline{a}_y\theta_y + \overline{a}_z\theta_z,$$

где $\overline{a}_x = \frac{1}{N}\sum|a_x(x_i,y_i,z_i)|$, $\overline{a}_y = \frac{1}{N}\sum|a_y(x_i,y_i,z_i)|$, $\overline{a}_z = \frac{1}{N}\sum|a_z(x_i,y_i,z_i)|$.

6. Вычислить среднюю приборную погрешность функции $\theta_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\theta_{f_i}|$.

7. Вычислить полную погрешность функции $\Delta\overline{f} = \Delta f + \theta_f$.

8. Записать результат измерения и округлить его.
9. Свести результаты обработки эксперимента в табл. 3.3.

Таблица 3.3

x_i						
θ_{xi}						$\theta_x = \max \theta_{xi} =$
y_i						
θ_{yi}						$\theta_y = \max \theta_{yi} =$
f_i						$\bar{f} =$
$f{\uparrow}_i$						$R_f = f{\uparrow}_N - f{\uparrow}_1 =$
$U_{fi} = f_{i+1} - f_i$						$U_{fi} < U_{P,N} R_f =$
$\Delta f_i = f_i - \bar{f}$						$\Sigma \Delta f_i = 0$
$(\Delta f_i)^2$						$\Sigma(\Delta f_i)^2 =$
θ_{fi}						$\theta_f = \left(\sum \lvert\theta_{f_i}\rvert\right)/N =$
$S_{\bar{f}} = \sqrt{\sum (\Delta f_i)^2 / N(N-1)} =$, $\Delta f = t_{P,N} S_{\bar{f}} =$, $\Delta f_\beta = \beta_{P,N} R_f =$, $\Delta f \approx \Delta f_\beta$ $\Delta \bar{f} = \Delta f + \theta_f =$, $f = \bar{f} \pm \Delta \bar{f} =$, $P = ...\%, N = ...$						

В качестве примера обработки данных косвенных измерений выборочным методом рассмотрим эксперимент по определению ускорения свободного падения g по совместным измерениям периода колебания математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ и его длины l. Тогда $g = 4\pi^2 l / T^2$. Результаты расчетов могут быть представлены в виде табл. 3.4.

Таблица 3.4

l_i, м	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$\theta_l = \max \theta_{l\,i} = 5\cdot10^{-4}$ м
T_i, с	1.415	1.563	1.670	1.791	1.910	$\theta_T = \max \theta_{T\,i} = 10^{-4}$ с
g_i	9.859	9.696	9.909	9.846	9.739	$\bar{g} = 9.8098$
$g{\uparrow}_i$	9.696	9.739	9.846	9.859	9.909	$R_g = g{\uparrow}_N - g{\uparrow}_1 = 0.213$
$U_{fi} = g_{i+1} - g_i$	0.043	0.107	0.013	0.05		$U_{gi} < U_{P,N} R_g = 0.136$
$\Delta g_i = g_i - \bar{g}$	0.049	0.114	0.099	0.036	0.07	$\Sigma \Delta g_i = 0$
$(\Delta g_i)^2$	$2.385\times$ $\times10^{-3}$	$13.00\times$ $\times10^{-3}$	$9.819\times$ $\times10^{-3}$	$1.309\times$ $\times10^{-3}$	$4.945\times$ $\times10^{-2}$	$\Sigma(\Delta g_i)^2 = 0.003141$
θ_{gi}	$11.0\times$ $\times10^{-3}$	$9.321\times$ $\times10^{-3}$	$8.264\times$ $\times10^{-3}$	$7.253\times$ $\times10^{-3}$	$6.43\times$ $\times10^{-3}$	$\theta_g = \left(\sum \lvert\theta_{g_i}\rvert\right)/N = 0.0085$

Для определения приборной погрешности используем метод логарифмирования функции.

$$\ln g(l,T) = \ln(4\pi^2) + \ln l - 2\ln T\,;\; b_l = \frac{d\ln g}{dl} = \frac{1}{l},\; b_T = \frac{d\ln g}{dT} = -\frac{2}{T}\,;$$

$$\theta_{g_i} = g_i\left(\left|\frac{\theta_l}{l_i}\right| + \left|\frac{2\theta_T}{T_i}\right|\right);\; S_{\bar{g}} = \sqrt{\sum_i (\Delta g_i)^2 \Big/ \left[N(N-1)\right]} = 0.03963,$$

$$\Delta g = t_{P,\,N} S_{\bar{g}} = 0.11016,\; \Delta g_\beta = \beta_{P,\,N} R_f = 0.109,\; \Delta g \approx \Delta g_\beta,\; \Delta\bar{g} = \Delta g + \theta_g = 0.119,$$

$$g = 9.81 \pm 0.12\ \text{м}/\text{с}^2,\; P = 95\,\%,\, N = 5\,.$$

3.5. Контрольные вопросы

1. В каких случаях при обработке данных косвенных измерений применяют метод переноса погрешностей, а в каких – метод выборки?
2. Как определить по исходным данным, является ли набор значений выборкой случайной величины или последовательностью, искусственно задаваемой экспериментатором?
3. Как складываются друг с другом случайные и приборные погрешности аргументов функции, частные приборные погрешности аргументов функции, частные случайные погрешности, приборная и случайная погрешности функции в методе переноса погрешностей?
4. Как складываются друг с другом частные приборные погрешности аргументов функции, частные случайные погрешности, приборная и случайная погрешности функции в выборочном методе?
5. Сформулируйте алгоритм обработки данных методом переноса погрешностей.
6. Сформулируйте алгоритм обработки данных выборочным методом.

4. СОВМЕСТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Теорема экспериментатора

Через любые две точки можно провести любую кривую, и, притом, только одну.

А. И. Слободянюк. Физическая олимпиада: экспериментальный тур

4.1. Задача регрессии и метод наименьших квадратов

Задачей обработки совместных измерений является построение аналитической зависимости по имеющимся совместным измерениям двух (или нескольких) величин. В общем случае структура зависимости $y = f(x)$ заранее неизвестна и определяется исходя из имеющихся экспериментальных данных. В ряде случаев предполагаемый вид функциональной зависимости $y = f(x)$ известен заранее на основании каких-либо теоретических соображений и неизвестны лишь параметры этой зависимости.

На плоскости xOy каждая пара совместно измеренных значений (x_i, y_i) определяет положение некоторой точки. Величины x_i и y_i не свободны от погрешностей, поэтому определяемые ими точки не лежат точно на какой-то кривой, а образуют некоторое облако с нечеткими границами (рис. 4.1). Подлежащая определению функциональная зависимость $y = f(x)$ описывает некоторую кривую, называемую *регрессионной кривой*, проходящую через область, заполненную точками (x_i, y_i). В основу выбора вида кривой $y = f(x)$ могут быть положены различные факторы: вид облака точек и имеющаяся информация о связи величин x и y, а также соображения удобства использования полученной кривой в дальнейшем и др.

Сопоставление полученных в результате решения этих задач экспериментальной зависимости и конкретизированной теоретической кривой позволяет сделать вывод о справедливости положений данной теории. Таким образом, просто найти параметры теоретической кривой, наилучшим образом соответствующие эксперименту, не достаточно. Для подтверждения справедливости теории необходимо также, чтобы совпадали основные качественные особенности поведения этих кривых. Так, для случая, показанного на рис. 4.2, аппроксимация экспериментальной зависимости прямой линией (показана штрихами) недопустима и необходимо использование нелинейной функции (показана сплошной линией). «Всякая неизвестная функция линейна, если она не парабола»…

Аналитическая зависимость $y = f(x)$ обычно содержит ряд параметров $a_1, a_2, \ldots, a_K$, не зависящих от x, и выражение подлежащей определению кривой можно записать в виде

$$y = f(x,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_K). \tag{4.1}$$

Изменяя параметры, можно изменять как вид кривой в некоторых пределах, так и ее положение на плоскости xOy.

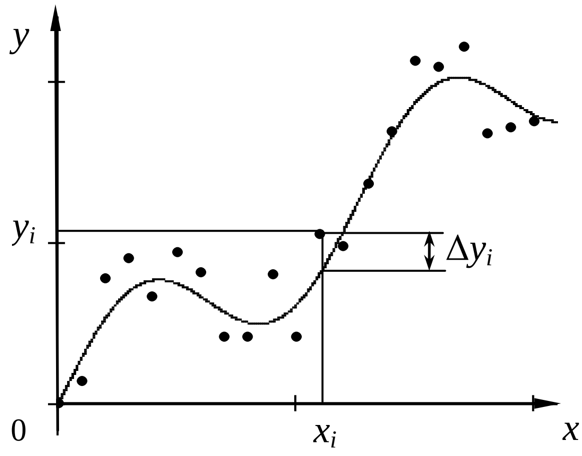

Рис. 4.1. Регрессионная кривая

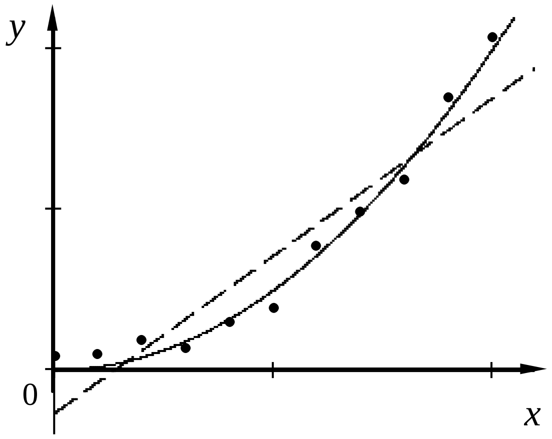

Рис. 4.2. Пример необходимости нелинейной аппроксимации

В случае совпадения качественных особенностей кривых указанные параметры зависимости должны быть найдены таким образом, чтобы искомая теоретическая кривая $y = f(x)$ наилучшим образом ложилась бы на экспериментальные точки набора совместных наблюдений (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$. Подставив в качестве аргумента функции (4.1) значение x_i, получим $y = f(x_i,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_K) \neq y_i$. Для наблюдений будут иметь место отклонения

$$\Delta y_i = y_i - f(x_i,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_K), \tag{4.2}$$

которые называются *остаточными погрешностями*.

Существуют различные критерии выбора наилучшего соответствия экспериментальных точек и регрессионной кривой. Одним из наиболее общих способов отыскания оценок истинных значений искомых параметров является разработанный Лежандром и Гауссом *метод наименьших квадратов* (МНК). Согласно этому методу оценки параметров a_j выбираются так, чтобы *минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей*

$$g(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_K) = \sum_i \left(\Delta y_i\right)^2 \to \min_{a_1, a_2, \ldots, a_K}. \tag{4.3}$$

В точке минимума (4.3) частные производные функции $g(a_1,\ a_2, ...,\ a_K)$ по каждому параметру должны обращаться в нуль, что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial g(a_1,\ a_2, ...,\ a_K)}{\partial a_j} = \sum_i [y_i - f(x_i,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_K)] \frac{\partial f(x_i,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_K)}{\partial a_j} = 0, \quad (4.4)$$

где $j = 1,\ 2,\ ...\ ,\ K$, позволяющей определить наилучшие значения параметров согласно условию (4.3).

При использовании МНК значения x_i обычно задаются экспериментатором, поэтому можно считать, что они содержат только приборные погрешности и не содержат случайных. Значения y_i содержат как приборные, так и случайные погрешности. Для определения случайных погрешностей параметров $a_1,\ a_2, ...,\ a_K$ предположим, что распределения величин y_i взаимно независимы и имеют одно и то же среднеквадратическое отклонение.

При выполнении этих условий *остаточная дисперсия,* представляющая собой среднее значение суммы квадратов остаточных погрешностей величины y, также обращается в минимум:

$$S_y^2 = \frac{1}{N-K} g(a_1,\ a_2, ...,\ a_K) = \frac{1}{N-K} \sum_i [y_i - f(x_i,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_K)]^2, \quad (4.5)$$

где K – количество искомых параметров; $N - K$ – число *степеней свободы* уравнения регрессии. Появление множителя $1/(N-K)$ взамен $1/N$ обосновывается в математической статистике.

4.2. Случай линейной зависимости двух величин

Задача нахождения наилучшей аппроксимирующей кривой в общем случае является достаточно сложной и наиболее просто решается, если функциональная зависимость имеет вид прямой линии $y = ax + b$. Поэтому на практике, если это возможно, сложные функциональные зависимости сводят к линейным зависимостям. При этом задача нахождения регрессионной кривой сводится к решению следующих задач:

1. Линеаризация нелинейных зависимостей, которая осуществляется соответствующей заменой переменных. Примеры такой замены приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№	Исходная функция	Замена переменных	Новая функция
1	$y = Ax^n$	$X = x^n, \quad a = A$	$y = aX$
2	$y = Ax^n$	$Y = \ln y, \quad X = \ln x, \quad a = n, \quad b = \ln A$	$Y = aX + b$
3	$y = Ae^{ax}$	$Y = \ln y, \quad b = \ln A$	$Y = ax + b$
4	$y = ax^n + b$	$X = x^n$	$y = aX + b$
5	$y = 1/(ax^n + b)$	$Y = 1/y, \quad X = x^n$	$Y = aX + b$
6	$y = x/(a + bx)$	$Y = 1/y, \quad X = 1/x$	$Y = aX + b$
7	$y = ax^n + bx^m$	$Y = yx^{-m}, \quad X = x^{n-m}$	$Y = aX + b$
8	$y = a\sin x + b\cos x$	$Y = y/\cos x, \quad X = \operatorname{tg} x$	$Y = aX + b$

В некоторых случаях различные замены переменных могут приводить одну и ту же функцию к линейному виду несколькими способами. Например, эта ситуация возможна для зависимости $y = Ax^n$, соответствующие замены переменных приведены в строках 1 и 2 табл. 4.1.

Иногда модель предсказывает приближенную линейную зависимость в некотором интервале изменения физических величин. Тогда необходимо найти границы применимости линейного приближения и описать их при анализе экспериментальных результатов.

2. Нахождение наилучших значений коэффициентов a и b в линейной зависимости $y = ax + b$ или коэффициента a в зависимости $y = ax$ согласно методу наименьших квадратов. Альтернативными методу наименьших квадратов являются упрощенные оценочные методы на основе визуального определения параметров регрессионной кривой по графику, а также метод парных точек.

3. Нахождение случайных и приборных погрешностей этих коэффициентов.

4. Определение по найденным значениям коэффициентов a и b физических констант, содержащихся в этих коэффициентах. Последняя задача решается стандартным приемом метода переноса погрешностей при косвенных измерениях.

4.3. Определение параметров линейной зависимости по графику

После нанесения на график экспериментальных точек определяют значения $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ и $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$. Через точку с координатами $(\overline{x}, \overline{y})$ проводят прямую, зрительно наилучшим образом ложащуюся на экспериментальные точки (экспериментальные точки должны располагаться равномерно по обе стороны от этой прямой). На рис. 4.3 такой прямой является *1 – 2*. На полученной прямой выбирают две достаточно удаленные друг от друга точки (точки *1* и *2*). Их координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) используют для определения тангенса угла наклона a и смещения b полученной прямой:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}. \tag{4.6}$$

Из дальнейших построений исключают точки, расстояние от которых до прямой *1 – 2* существенно превышает среднее расстояние от остальных экспериментальных точек до прямой *1 – 2* (такой точкой на рис. 4.3 является точка *7*). Наиболее вероятно, что эти точки являются промахами.

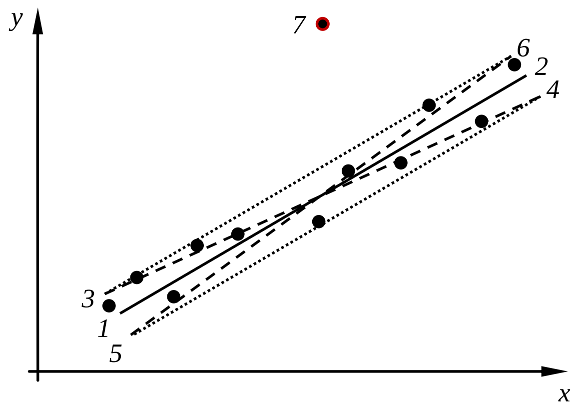

Рис. 4.3. Построение прямых для определения параметров линейной зависимости по графику

Для оценки доверительных интервалов Δa и Δb строят две дополнительные симметричные прямые *3 – 6* и *5 – 4*, параллельные прямой *1 – 2* так, чтобы экспериментальные точки в основном располагались между ними. Соединив противоположные концы коридора предельными прямыми (прямые *3 – 4* и *5 – 6*), определяют их параметры так же, как и для прямой *1 – 2*. После чего определяют Δa и Δb:

$$\Delta a = \frac{|a_{34} - a_{56}|}{2}, \quad \Delta b = \frac{|b_{34} - b_{56}|}{2}. \tag{4.7}$$

4.4. Метод парных точек

Метод парных точек является наиболее простым способом нахождения линейной зависимости и применяется в основном для определения лишь углового коэффициента наклона прямой a.

Допустим, что у нас имеется N точек, лежащих на одной прямой. Пронумеруем точки по порядку (рис. 4.4). Возьмем точки 1 и $[N/2]+1$, где квадратные скобки означают взятие целой части; ими определится некоторая прямая с угловым коэффициентом $a_1 = \dfrac{y_{[N/2]+1} - y_1}{x_{[N/2]+1} - x_1}$. Повторим определение углового коэффициента a_2 для прямой, проходящей через 2 и $[N/2]+2$ точки и т. д. В качестве наилучшего значения a выбирается его среднее значение $\overline{a}$ и обычным способом обработки прямых измерений находятся его среднеквадратичная погрешность и доверительный интервал.

Таким образом, полученная прямая линия будет иметь угловой коэффициент $\overline{a}$ и проходить через точку, соответствующую средним значениям переменных x и y: $(\overline{x}, \overline{y})$.

Рассмотрим пример обработки данных эксперимента по определению скорости движения человека.

Пусть у нас имеется набор времен t_i и соответствующих этим временам координат x_i велосипедиста, движущегося с постоянной скоростью в одном и том же направлении, табл. 4.2.

Таблица 4.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, с	4	28	52	78	104	126	152	176	210	233
x, м	11	129	304	428	502	643	852	1007	1044	1144

При равномерном движении координату в любой момент времени можно определить из соотношения $x = vt + x_0$, где x_0 – координата, в которой находился велосипедист в начале эксперимента, а скорость v – угловой коэффициент линейной зависимости. Для определения v воспользуемся методом парных точек.

1. Нанесем пронумерованные экспериментальные точки на график.

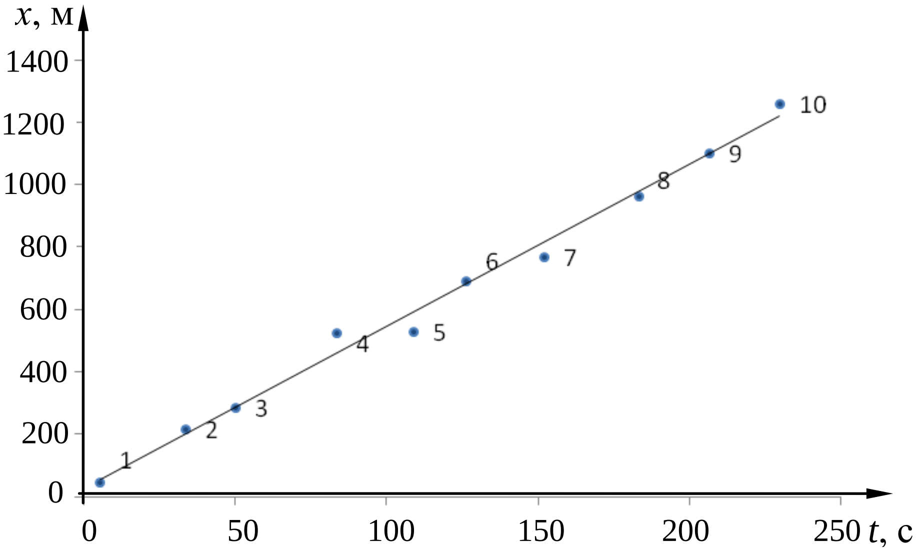

Рис. 4.4. Определение скорости велосипедиста методом парных точек

Выберем пары точек: 1 – 6, 2 – 7, 3 – 8, 4 – 9, 5 – 10. Данные удобнее представить в виде таблицы.

Таблица 4.3

Пары точек	Δt, с	Δx, м	$v = \Delta x / \Delta t$, м/с	$\Delta v_i = v_i - \bar{v}$, м/с	$(\Delta v_i)^2$, м/с
1 – 6	122	632	5.18	-0.08	0.0064
2 – 7	125	723	5.78	0.52	0.2704
3 – 8	124	702	5.66	0.40	0.1600
4 – 9	132	616	4.66	-0.60	0.3600
5 – 10	128	642	5.02	-0.24	0.0576

Среднее значение скорости $\bar{v} = 5.26$ м/с.

Выборочное СКО среднего $S_{\bar{v}} = \sqrt{\sum (\Delta v_i)^2 / N(N-1)} \approx 0.21$.

Для $N = 5$ и доверительной вероятности Р = 95 % коэффициент Стьюдента $t_{P,N} = 2.8$. Случайная погрешность $\Delta v = t_{P,N} S_{\bar{v}} = 0.58$.

Окончательный результат: $v = 5.3 \pm 0.6$ м/с при P = 95%. Относительная погрешность составляет 11%, что говорит о значительных экспериментальных погрешностях.

4.4. Нахождение коэффициентов в уравнении прямой *y* = *ax* + *b*

Нахождение наилучших значений коэффициентов a и b в зависимости $y = ax + b$ производится согласно описанному методу наименьших квадратов.

В случае линейной зависимости (4.4) приводит к системе из двух уравнений относительно двух неизвестных a и b:

$$\begin{cases} a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i = \sum_i x_i y_i; \\ a\sum_i x_i + bN = \sum_i y_i. \end{cases} \tag{4.8}$$

Решение системы (4.8) дает нам выражения для наилучших оценок значений параметров. Обозначив эти оценки $\bar{a}$ и $\bar{b}$, получим

$$\bar{a} = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}; \quad \bar{b} = \frac{\bar{y}\sum x_i^2 - \bar{x}\sum_i x_i y_i}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2},$$

где $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_i y_i$.

При проведении расчетов целесообразно пользоваться эквивалентными формулами, чтобы избежать нахождения разностей двух близких больших величин, приводящих к большим вычислительным ошибкам:

$$\bar{a} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}; \quad \bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x}. \tag{4.9}$$

Последнее выражение для $\bar{b}$ говорит о том, что линия регрессии проходит через точку с координатами ($\bar{x}$, $\bar{y}$). Используя дополнительную точку с координатами ($\bar{b}$, 0) можно по двум точкам построить искомую аппроксимирующую прямую.

Для нахождения дисперсий коэффициентов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ воспользуемся соотношениями (4.9). С учетом формулы (2.14) дисперсии суммы случайных некоррелированных величин $y_1, \ldots, y_N$ с одинаковой дисперсией, получим в предположении, что x_i не содержат случайных погрешностей:

$$S_{\bar{a}}^2 = \frac{S_y^2}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}, \quad S_{\bar{b}}^2 = \frac{S_y^2 \sum x_i^2}{N\left(\sum x_i^2 - N\bar{x}^2\right)}, \tag{4.10}$$

где остаточная дисперсия S_y^2 рассчитывается согласно (4.5) и может быть приведена к виду

$$S_y^2 = \frac{1}{N-2}\left(\sum_i y_i^2 - \bar{a}\sum_i x_i y_i - \bar{b}\sum_i y_i\right) = \frac{1}{N-2}\left(\sum_i \left(y_i - \bar{y}\right)^2 - \bar{a}^2 \sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right).$$

Выражения для дисперсий (4.10) после подстановки остаточной дисперсии S_y^2 и значений $\bar{x}$, $\bar{y}$ принимают вид

$$S_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{N-2}\left[\frac{\sum_i \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2} - \bar{a}^2\right], \qquad S_{\bar{b}}^2 = S_{\bar{a}}^2\left[\bar{x}^2 + \frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]. \quad (4.11)$$

Тогда случайные погрешности коэффициентов будут иметь вид

$$\Delta a = t_{P,\,N-1} S_{\bar{a}}, \qquad \Delta b = t_{P,\,N-1} S_{\bar{b}},$$

где $S_{\bar{a}} = \sqrt{S_{\bar{a}}^2}$, $S_{\bar{b}} = \sqrt{S_{\bar{b}}^2}$ – СКО $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно; $t_{P,\,N-1}$ – коэффициент Стьюдента с $\nu = N-2$ степенями свободы. Приборные погрешности коэффициентов a и b могут быть найдены на основе (4.9) по формуле (3.10) косвенных измерений, что дает

$$\theta_a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial a}{\partial x_i}\right|\theta_x + \left|\frac{\partial a}{\partial y_i}\right|\theta_y\right) = 0, \qquad \theta_b = \left|\bar{a}\right|\theta_x + \theta_y. \quad (4.12)$$

Равенство нулю приборной погрешности в определении коэффициента наклона a прямой означает, что он не зависит от одновременного смещения всех координат x_i или y_i на величины θ_x или θ_y соответственно.

Если x и y являются косвенно измеряемыми величинами, полученными, например, при замене переменных в процессе линеаризации, приборные погрешности θ_x и θ_y необходимо вычислить согласно стандартным приемам обработки данных косвенных измерений. Определив полные погрешности $\Delta\bar{a} = \Delta a$ и $\Delta\bar{b} = \Delta b + \theta_b$, уравнение регрессионной прямой можно записать в виде

$$y = \left(\bar{a} \pm \Delta\bar{a}\right)x + \left(\bar{b} \pm \Delta\bar{b}\right), \quad \text{с вероятностью } P = P_0. \quad (4.13)$$

4.5. Нахождение коэффициента в уравнении прямой *y = ax*

Если уравнение аппроксимирующей прямой имеет вид $y = ax$, то нахождение коэффициента a в уравнении наилучшей прямой сводится к нахождению минимума остаточной дисперсии (4.5), где количество искомых параметров $K = 1$. Тогда из (4.4)

$$\bar{a} = \sum_i x_i y_i \Big/ \sum_i x_i^2 = \alpha \sum_i x_i y_i , \quad \text{где} \quad \alpha = 1 \Big/ \sum_i x_i^2 . \tag{4.14}$$

Из полученного выражения для коэффициента a находим его дисперсию

$$S_a^2 = S_y^2 \alpha^2 \sum_i x_i^2 = S_y^2 \Big/ \sum_i x_i^2 ,$$

где остаточная дисперсия с учетом (4.5) может быть вычислена по формуле

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_i y_i^2 - \bar{a}^2 \sum_i x_i^2 \right).$$

Зная СКО $S_{\bar{a}} = \sqrt{S_{\bar{a}}^2}$, найдем случайную погрешность коэффициента $\bar{a}$: $\Delta a = t_{P,\,N} S_{\bar{a}}$. Отметим, что, в отличие от случая построения прямой вида $y = ax + b$, в случае регрессионной зависимости вида $y = ax$ одновременное смещение всех координат x_i или y_i вследствие приборной погрешности аргументов оказывает существенное влияние на угловой коэффициент, так как принадлежащая этой прямой точка $(x, y) = (0, 0)$ фиксирована. Используя формулу (4.14), найдем его приборную погрешность. Имеем

$$\theta_a = \frac{\sum_i x_i}{\sum_i x_i^2} \left(\left| \bar{a} \right| \theta_x + \theta_y \right).$$

Определив полную погрешность $\Delta\bar{a} = \Delta a + \theta_a$ коэффициента $\bar{a}$, получим уравнение регрессионной прямой в виде

$$y = \left(\bar{a} \pm \Delta\bar{a} \right) x , \quad \text{с вероятностью } P = P_0 .$$

Прямая МНК $y = \bar{a}x$ строится по двум точкам с координатами $(x, y) =$ $= (0, 0)$ и $(x_0, \bar{a}x_0)$, где x_0 – произвольное значение аргумента x. Отметим, что коэффициент $a = y / x$ можно рассматривать как функцию двух переменных y и x, и его значение может быть найдено методами обработки данных косвенных измерений.

4.6. Алгоритм обработки данных по МНК для уравнения $y = ax + b$ на примере определения параметров равноускоренного движения

Рассмотрим эксперимент по определению скорости тела $v = at + v_0$ при равноускоренном движении, по результатам которого надо найти ускорение тела a и его начальную скорость v_0. Пусть приборные погрешности определения времени и скорости равны, соответственно, $\theta_t = 1$ с и $\theta_v = 0.2$ м/с. Результаты обработки эксперимента согласно МНК сведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

№	$x_i=t_i$	$y_i=v_i$	$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	$(\Delta x_i)^2$	$\Delta y_i = y_i - \bar{y}$	$(\Delta y_i)^2$	$\Delta x_i\,\Delta y_i$
1	0	10.1	–12.5	156.25	–12.517	156.675	156.463
2	5	15.3	–7.5	56.25	–7.317	53.538	54.877
3	10	19.8	–2.5	6.25	–2.817	7.935	7.043
4	15	24.6	2.5	6.25	1.983	3.932	4.958
5	20	30.4	7.5	56.25	7.783	60.575	58.373
6	25	35.5	12.5	156.25	12.883	165.972	161.037
$\sum$	$\sum x_i =$ = 75	$\sum y_i =$ = 135.7	$\sum \Delta x_i =$ = 0	$\sum \Delta x_i^2 =$ = 437.5	$\sum \Delta y_i =$ = –0.002	$\sum \Delta y_i^2 =$ = 448.628	$\sum \Delta x_i \Delta y_i =$ = 442.751

1. Средние значения x и y:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = 12.5 \text{ с}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = 22.617 \text{ м/с}^2.$$

2. Средние значения $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} = \frac{\sum\limits_i (\Delta x_i \Delta y_i)}{\sum\limits_i (\Delta x_i)^2} = 1.012 \text{ м/с}^2, \qquad \bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x} = 9.967 \text{ м/с}.$$

3. Дисперсия и СКО $\bar{a}$:

$$S_a^2 = \frac{1}{N-2}\left(\frac{\sum \Delta y_i^2}{\sum \Delta x_i^2} - \bar{a}^2\right) = 3.229 \cdot 10^{-4}, \qquad S_{\bar{a}} = \sqrt{S_a^2} = 1.797 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2.$$

4. Дисперсия и СКО $\bar{b}$:

$$S_b^2 = S_a^2\left(\bar{x}^2 + \frac{1}{N}\sum \Delta x_i^2\right) = 0.028, \qquad S_{\bar{b}} = \sqrt{S_b^2} = 0.167 \text{ м/с}.$$

5. Случайные погрешности a и b.

Коэффициент Стьюдента для P = 95 % и $N - 1 = 5$ равен $t_{P,\,N-1} = 2.78$,

$$\Delta a = t_{P,\,N-1} S_{\bar{a}} = 0.04996 \text{ м/с}^2, \qquad \Delta b = t_{P,\,N-1} S_{\bar{b}} = 0.464 \text{ м/с}.$$

6. Приборная погрешность коэффициента b:

$$\theta_b = \left|\bar{a}\right| \theta_x + \theta_y = 1.212 \text{ м/с},$$

где учтено, что $\theta_x = 1$ с и $\theta_y = 0.2$ м/с**.**

7. Полные погрешности a и b:

$$\Delta\bar{a} = \Delta a = 0.04996 \text{ м/с}^2 \quad \text{и} \quad \Delta\bar{b} = \Delta b + \theta_b = 1.676 \text{ м/с}^2.$$

8. Результат: $y = (1.012 \pm 0.04996)x + (9.967 \pm 1.676)$.

9. Окончательный результат в округленной форме:

$$y = (1.01 \pm 0.05)x + (10.0 \pm 1.7), \quad \text{с вероятностью } P = 95\,\%.$$

4.7. Алгоритм обработки данных по МНК для уравнения *y = ax* на примере определения ускорения свободного падения

Рассмотрим эксперимент по определению ускорения свободного падения g по совместным измерениям периода колебания математического маятника T и его длины l, значения которых даются в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Параметр	№ наблюдения					θ
	1	2	3	4	5	
l_i, м	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$5\cdot10^{-4}$
T_i, с	1.415	1.563	1.670	1.791	1.910	10^{-4}

Дальнейшая обработка данных осуществляется в следующей последовательности.

1. Линеаризуем зависимость $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, положив $y = T$, $x = \sqrt{l}$, $a = 2\pi/\sqrt{g}$. В новых переменных она будет иметь вид $y = ax$.

2. Заполняем табл. 4.6 обработки данных по МНК для уравнения $y = ax$, представив исходные данные в новых переменных $(x_i, y_i) = (\sqrt{l_i}, T_i)$.

Таблица 4.6

№	$x_i = \sqrt{l_i}$	$y_i = T_i$	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1 2 3 4 5	0.7071 0.7746 0.8367 0.8944 0.9487	1.415 1.563 1.670 1.791 1.910	0.500 0.600 0.700 0.800 0.900	2.0022 2.4430 2.7889 3.2077 3.6481	1.0005 1.2107 1.3973 1.6019 1.8120
$\sum$	$\sum x_i$ = 4.1615	$\sum y_i$ = 8.349	$\sum x_i^2$ = 3.500	$\sum y_i^2$ = 14.0899	$\sum x_i y_i$ = 7.0224

3. Среднее значение a : $\bar{a} = \sum_i x_i y_i \Big/ \sum_i x_i^2 = 2.0064$.

4. Дисперсия и СКО $\bar{a}$:

$$S_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{N-1}\left(\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} - \bar{a}^2\right) = 1.12 \cdot 10^{-5}, \qquad S_{\bar{a}} = \sqrt{S_{\bar{a}}^2} = 3.35 \cdot 10^{-3}.$$

5. Случайная погрешность коэффициента a для $P = 95$ % и $N = 5$, с учетом того, что коэффициент Стьюдента $t_{P,\,N}$ = 2.78, имеет вид

$$\Delta a = t_{P,\,N} S_{\bar{a}} = 9.31 \cdot 10^{-3}.$$

6. Приборная погрешность измеряемой прямым образом величины $y = T$ равна $\theta_y = \theta_T = 10^{-4}\,\text{с}$, а приборная погрешность косвенно измеряемой величины $x = \sqrt{l}$ имеет вид

$$\theta_x = \frac{1}{N}\sum_i \theta_{l_i} = \frac{1}{N}\sum_i \theta_l \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l=l_i} = \frac{1}{N}\sum_i \frac{\theta_l}{2\sqrt{l_i}} = \frac{\theta_l}{2N}\sum_i \frac{1}{x_i}.$$

Используя данные табл. 4.5, 4.6**,** получим

$$\frac{1}{N}\sum_i \frac{1}{x_i} = 1.215, \qquad \theta_x = 3.036 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда приборная погрешность коэффициента a будет

$$\theta_a = \left(\sum_i x_i \Big/ \sum_i x_i^2\right)\left(\left|\bar{a}\right|\theta_x + \theta_y\right) = 8.432 \cdot 10^{-4}.$$

7. Полная погрешность коэффициента a:

$$\Delta\bar{a} = \Delta a + \theta_a = 1.015 \cdot 10^{-2}.$$

8. Результат измерения в округленной форме:

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a} = 2.0064 \pm 0.0010 \text{ с вероятностью } P = 95\ \%.$$

По коэффициенту $a = 2\pi/\sqrt{g}$ может быть найдено ускорение свободного падения $g = 4\pi^2/a^2$ по стандартной схеме обработки данных косвенных измерений методом переноса погрешностей.

9. Среднее значение:

$$\bar{g} = 4\pi^2/\bar{a}^2 = 9.8107 \text{ м/с}^2.$$

10. Случайная погрешность:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial a}\Delta a\right| = \frac{8\pi^2}{\bar{a}^3}\Delta a = 0.0088 \text{ м/с}^2.$$

11. Приборная погрешность:

$$\theta_g = \left|\frac{\partial g}{\partial c}\theta_a\right| = \frac{8\pi^2}{\bar{c}^3}\theta_a = 0.0083 \text{ м/с}^2.$$

12. Полная погрешность:

$$\Delta\bar{g} = \Delta g + \theta_g = 0.0172 \text{ м/с}^2.$$

13. Окончательный результат в округленной форме:

$$g = \bar{g} \pm \Delta\bar{g} = 9.811 \pm 0.017 \text{ м/с}^2, \qquad \text{с } P = 95~\%.$$

4.8. Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются совместными?
2. Линеаризуйте следующие зависимости, перейдя от переменных (x, y) к новым переменным (X, $У$): $y = a\,x^n$; $y = a \ln x + b$; $\ln y = a \sin x + b$; $\mathrm{tg}\, y = a \cos x + c$; $y = a \exp x + c$; $y = ax^2 + bx + c$.
3. Сформулируйте критерий наименьших квадратов.
4. Как строятся по двум точкам прямые МНК вида у $= ax$ и $y = ax + b$?
5. Можно ли константу a в уравнении $y = ax$ найти методами косвенных измерений? Ответ обосновать.
6. Выведите формулы для приборных погрешностей θ_a и θ_b (4.12) коэффициентов a и b в уравнении прямой $y = ax + b$.
7. Какой вид будут иметь формулы приборных погрешностей коэффициентов a и b, если x и y являются косвенно измеряемыми величинами: $x = m \sin u$, $y = n\,v^3$, где m и n – константы, а u и v – прямо измеряемые N раз величины?

5. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ГРАФИКОВ

Диаграммы и графики являются наиболее удобным средством передачи информации о зависимости физических величин друг от друга. Для удобства чтения и восприятия графики оформляются согласно общепринятым единым правилам, основные моменты которых изложены далее.

1. Графики строят на миллиметровой или белой бумаге с применением чертежных инструментов. Миллиметровая бумага бывает трех типов: с равномерным масштабом по обеим осям, реже используется бумага с логарифмическим масштабом по одной оси и равномерным по другой, а также бумага с логарифмическим масштабом по обеим осям. При построении численных зависимостей на белой бумаге необходимо вычерчивание координатной сетки. Толщина координатных осей 0.8…1 мм, толщина линий сетки 0.3…0.5 мм. Кривые изображаются линиями толщиной 1 мм.

2. Если график информирует читателя только о качественном характере зависимости физической величины от параметра, то его координатные оси заканчиваются стрелками (рис. 5.1), никаких числовых значений вдоль осей не наносят. Координатная сетка на поле графика не строится.

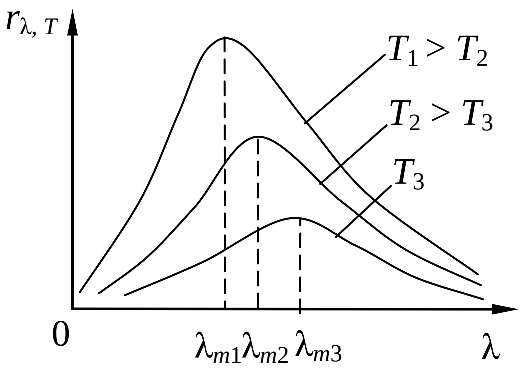

Рис. 5.1. Зависимость спектральной лучеиспускательной способности от длины волны

3. Если при описании зависимости требуется указывать числовые значения величин по осям, то оси изображают без стрелок, а на поле графика вычерчивается координатная сетка. Вдоль координатных осей строятся шкалы, на которых указывают цифровые значения величин. Числовые масштабы шкал выбирают в виде равноотстоящих друг от друга чисел, оканчивающихся на последовательности 0, 1, 2, 3, 4, …; 0, 2, 4, 6, 8, …; 0, 5, 10, 15, 20, …; 0, 25, 50, 75, 100, …. Например, это может быть последовательность 3.72, 3.74, 3.76, 3.78, 3.80, …. Масштабы по разным осям могут быть различны.

4. Вместе со значениями масштаба величины на шкале указывается ее обозначение и единица измерения (рис. 5.2). Числовые значения на шкале должны находиться на достаточно большом расстоянии друг от друга, чтобы не сливаться в одну сплошную линию. Общий порядковый числовой множи-

тель для значений шкалы обычно выносится в обозначение величины либо учитывается при выборе единиц измерения. При выносе числового множителя произведение буквенного обозначения величины на множитель $10^{\pm n}$ означает, что фактическое значение величины будет равно числовому значению на шкалах осей координат, деленному на этот сомножитель.

5. Поле графика должно использоваться максимально полно, поэтому шкалы вдоль координатных осей могут начинаться не с нуля, а с тех значений, для которых строится график (рис. 5.2). Если обе шкалы начинаются с нуля, то в начале координат ставится один общий нуль. Все точки кривых на графике должны находиться напротив оцифрованных участков координатных осей и не выходить за пределы поля графика.

6. Экспериментальные точки изображаются на графике в виде кружков, крестиков, треугольников и т. п. (рис. 5.3). Экспериментальные значения на оси не выносятся, за исключением, при необходимости, экстремальных и асимптотических значений величин. Зависимости изображаются *плавными* кривыми, около которых расположены экспериментальные точки. Расшифровка используемых значков располагается под графиком или сбоку от него. Размер значков 1.5…2 мм.

7. Как правило, на одном поле вычерчивается несколько однотипных кривых, отличающихся друг от друга параметрами, условиями эксперимента и т. п. Для пояснения отличий кривых указываются значения различающихся параметров кривых. Эти значения следует располагать вдоль одной линии. В

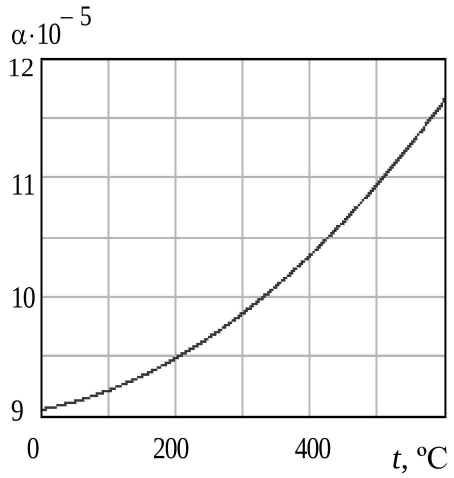

Рис. 5.2. Температурная зависимость параметра α

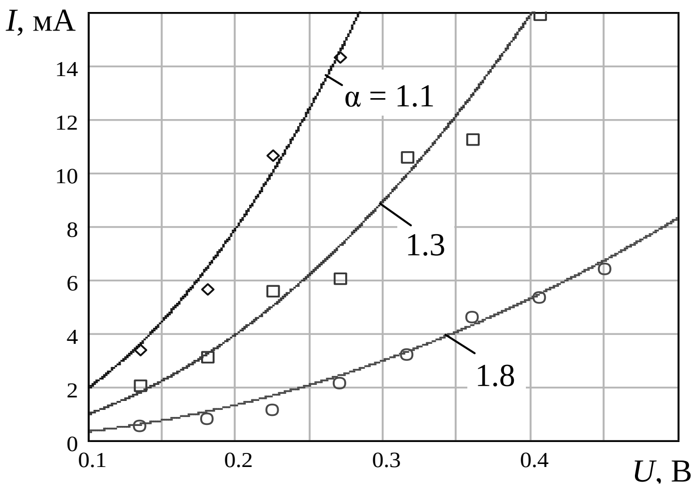

Рис. 5.3. Вольт-амперные характеристики диодов: ◊ – германий, □ – легированный кремний, ○ – арсенид галлия

местах расположения указанных значений, значков и других надписей координатная сетка разрывается. Вокруг надписи оставляется небольшое свободное пространство для облегчения чтения. По возможности следует избегать надписей на поле графика. Если же этого сделать не удается, то надписи должны быть максимально краткими (рис. 5.3).

8. Иногда на одном графике необходимо изобразить зависимости для двух разнородных величин, шкалы которых различны. Эти шкалы строятся по разные стороны координатных осей или по разные стороны поля графика (рис. 5.4). В местах расположения числовых значений шкалы, находящейся справа от оси ординат или выше оси абсцисс, линии координатной сетки прерываются.

9. При необходимости отображения погрешностей на графике через экспериментальную точку проводят один или два отрезка, параллельные осям абсцисс и ординат. Центры отрезков приходятся на экспериментальную точку, а их длины равны удвоенным погрешностям величин, откладываемым по параллельным осям (рис. 5.5).

10. Каждый рисунок нумеруют, дают ему название, отражающее содержание построенной зависимости. Для сокращения обозначений на рисунке используют цифры или латинские буквы, а пояснения к ним выносят в подрисуночную подпись.

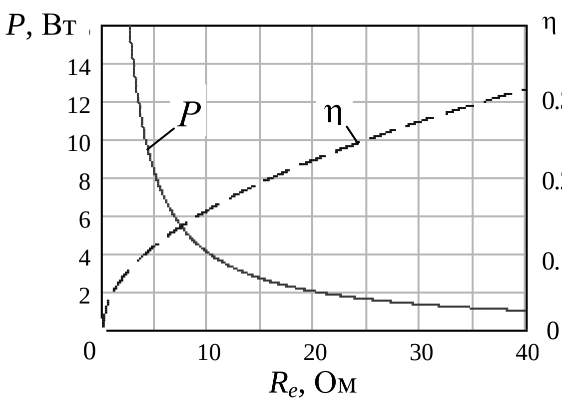

Рис. 5.4. Зависимость мощности и КПД от сопротивления нагрузки

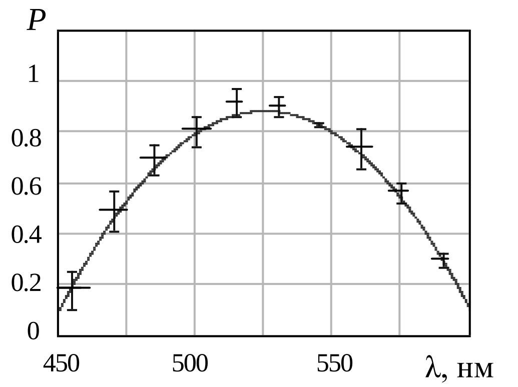

Рис. 5.5. Зависимость степени поляризации света от длины волны

6. КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

6.1. Прямые измерения

Найдите результат измерения по следующим выборкам объема $N = 5$ (табл. 6.1).

Таблица 6.1

№	1	2	3	4	5	θ_x
1	1.343	1.355	1.337	1.342	1.353	*0.004*
2	2.675	2.681	2.671	2.687	2.670	*0.005*
3	34.83	34.86	34.88	34.89	34.89	*0.05*
4	5.270	5.276	5.271	5.258	5.266	*0.008*
5	2.831	2.833	2.823	2.836	2.839	*0.006*
6	10.292	10.284	10.269	10.352	10.160	*0.08*
7	1.516	1.515	1.518	1.514	1.524	*0.005*
8	3.685	3.667	3.669	3.663	3.661	*0.05*
9	4.257	4.244	4.251	4.246	4.255	*0.006*
10	6.726	6.731	6.722	6.734	6.732	*0.005*
11	7.135	7.148	7.142	7.144	7.141	*0.008*
12	26.0	25.6	25.7	25.9	25.8	*0.5*
13	15.8	15.7	15.9	16.0	16.1	*0.2*
14	6.9	6.8	7.0	6.9	7.2	*0.2*
15	10.3	11.1	11.8	10.7	10.8	*0.5*
16	78.5	78.2	78.9	78.0	78.4	*0.4*
17	25.3	25.4	25.7	25.1	25.5	*0.6*
18	13.1	12.8	11.9	12.4	13.5	*0.5*
19	924	912	916	922	918	*2*
20	305.1	306.9	305.2	304.6	305.3	*0.5*
21	73.2	73.1	72.9	73.5	73.4	*0.5*
22	6.23	6.31	6.20	6.22	6.26	*0.05*
23	12.26	12.27	12.32	12.24	12.34	*0.05*
24	2.55	2.56	2.62	2.52	2.60	*0.04*
25	68.80	68.84	68.78	68.79	68.88	*0.04*
26	123.20	123.59	123.27	123.00	123.83	*0.5*
27	8.22	8.16	8.17	8.18	8.23	*0.05*
28	32.6	32.0	32.2	32.9	32.4	*0.4*
29	4.78	4.83	4.80	4.85	4.79	*0.06*
30	*7.66*	*7.62*	*7.61*	*7.58*	*7.59*	*0.05*

6.2. Косвенные измерения

Найдите результат косвенных измерений по следующим выборкам объема $N = 5$ (табл. 6.2).

Таблица 6.2

№	x, y	1	2	3	4	5	θ_x, θ_y	$f(x, y)$
1	x y	4.384 1.273	4.382 1.271	4.385 1.275	4.383 1.272	4.381 1.276	0.002 0.001	$\frac{7x^2}{3y}$
2	x y	0.10 25.55	0.20 9.04	0.30 4.91	0.40 3.19	0.50 2.29	0.01 0.02	$8x^3y^2$
3	x y	1.732 6.282	1.729 6.284	1.735 6.281	1.731 6.280	1.733 6.283	0.004 0.002	$5y\sin 2x$
4	x y	2.93 1.55	2.91 1.53	2.95 1.57	2.90 1.54	2.92 1.56	0.02 0.01	$3x^2+4y^3$
5	x y	4.42 3.26	4.39 3.28	4.37 3.225	4.40 3.24	4.41 3.27	0.04 0.02	$\sqrt{2x^2+5y^2}$
6	x y	7.39 2.63	7.35 2.65	7.37 2.59	7.36 2.61	7.38 2.64	0.01 0.02	$\sqrt{3x^2-4y^2}$
7	x y	5.20 0.47	5.60 0.52	6.00 0.56	6.40 0.60	6.80 0.63	0.02 0.01	$\sqrt[3]{\frac{5x}{6y}}$
8	x y	2.20 22.30	2.60 8.67	3.00 6.05	3.40 4.85	3.80 4.23	0.02 0.04	$\frac{4(x+y)}{xy}$
9	x y	1.434 0.375	1.432 0.373	1.435 0.371	1.438 0.376	1.433 0.372	0.002 0.002	$\frac{\sin[(x+y)/2]}{\sin(x/2)}$
10	x y	1.20 0.852	1.60 0.738	2.00 0.670	2.40 0.637	2.80 0.609	0.04 0.002	$\frac{3xy}{x+y}$
11	x y	0.722 0.345	0.725 0.347	0.721 0.348	0.726 0.344	0.723 0.345	0.002 0.004	$\frac{2\sin x}{\sin y}$
12	x y	0.60 0.215	1.00 0.359	1.40 0.502	1.80 0.646	2.20 0.789	0.02 0.002	$1+\frac{2x}{y}$
13	x y	3.42 2.27	3.45 2.31	3.41 2.29	3.44 2.26	3.34 2.28	0.01 0.02	$\frac{x^2+y^2}{2y}$
14	x y	1.40 2.884	1.80 2.644	2.20 2.296	2.60 2.289	2.80 2.347	0.04 0.002	$2y-\frac{3}{x}$
15	x y	1.43 2.63	1.42 2.61	1.41 2.65	1.42 2.62	1.44 2.64	0.01 0.02	$3x^2e^{-y}$
16	x y	*3.624* *0.58*	*3.632* *0.55*	*3.628* *0.53*	*3.625* *0.56*	*3.630* *0.54*	*0.005* *0.02*	$e^{-2x}\sin 4y$

Окончание табл. 6.2

№	x, y	1	2	3	4	5	θ_x, θ_y	f (x, y)
17	x y	7.84 2.23	7.79 2.25	7.82 2.27	7.80 2.24	7.85 2.26	0.02 0.02	$2\Big/\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$
18	x y	1.178 4.33	1.184 4.35	1.179 4.31	1.182 4.36	1.180 4.34	0.004 0.02	$3\ln x+4\ln y$
19	x y	10.21 2.55	10.24 2.51	10.19 2.53	10.20 2.52	10.23 2.54	0.04 0.04	$\sqrt{2\frac{x}{y}+3\frac{y}{x}}$
20	x y	2.00 3.70	2.20 3.35	2.40 3.10	2.60 2.95	2.80 2.60	0.02 0.04	$3\ln(xy)$
21	x y	4.20 2.40	4.60 2.70	5.00 2.90	5.40 3.10	5.80 3.35	0.05 0.04	$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
22	x y	1.54 2.845	1.53 2.852	1.52 2.848	1.55 2.854	1.56 2.847	0.02 0.005	$\frac{2\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
23	x y	3.27 2.43	3.30 2.46	3.32 2.41	3.29 2.47	3.35 2.42	0.02 0.02	$\frac{2xy}{x^2+y^2}$
24	x y	2.58 1.32	2.61 1.35	2.63 1.30	2.60 1.34	2.59 1.31	0.02 0.04	$3xy\sin\left(\frac{x}{y}\right)$
25	x y	3.171 2.95	3.168 2.92	3.165 2.96	3.172 2.97	3.166 2.93	0.002 0.04	$2\sin\frac{x}{y}+3\cos\frac{y}{x}$
26	x y	0.536 8.57	0.539 8.60	0.540 8.55	0.538 8.54	0.541 8.59	0.005 0.02	$2x^2\sin 3xy$
27	x y	5.27 2.215	5.30 2.213	5.33 2.216	5.29 2.214	5.31 2.217	0.02 0.005	$3xy\ln\left(\frac{x}{y}\right)$
28	x y	1.62 2.73	1.65 2.71	1.63 2.75	1.66 2.76	1.64 2.74	0.02 0.02	$\frac{2}{5}\frac{\ln 6x}{\ln 4y}$
29	x y	2.84 0.541	2.88 0.539	2.87 0.544	2.83 0.542	2.85 0.540	0.04 0.005	$4x^2y^2\cos\frac{xy}{2}$
30	x y	*5.54* *1.38*	*5.56* *1.34*	*5.58* *1.36*	*5.55* *1.35*	*5.53* *1.33*	*0.02* *0.02*	$x\left(1-e^{-2y}\right)$

6.3. Совместные измерения

Найдите по МНК коэффициент a в уравнении $y = ax$ и коэффициенты a и b в уравнении $y = ax + b$ по известным значениям координат (x_i, y_i) . Значения координаты x_i приведены в первой строке таблицы и предполагаются для всех наборов y одинаковыми. Первая строка y_i в каждом варианте описывается уравнением $y = ax$, вторая – уравнением $y = ax + b$. Приборные погрешности $\theta_x = 0.05$, $\theta_y = 0.005$. Постройте экспериментальные точки и рассчитанную регрессионную прямую на одном графике.

Таблица 6.3

№	x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	Уравнение	Приближенный ответ
1	y_i	3.45	7.03	10.48	13.75	17.52	$y = ax$	$y = 3.5x$
2	y_i	5.53	8.04	10.47	13.04	15.49	$y = ax + b$	$y = 2.5x + 3$
3	y_i	4.97	9.95	14.98	20.06	25.02	$y = ax$	$y = 5x$
4	y_i	6.94	9.03	10.96	12.95	15.04	$y = ax + b$	$y = 2x + 5$
5	y_i	3.96	8.02	12.10	15.97	19.95	$y = ax$	$y = 4x$
6	y_i	5.95	11.04	15.96	21.10	26.03	$y = ax + b$	$y = 5x + 1$
7	y_i	–2.05	–3.97	–6.03	–7.96	–10.08	$y = ax$	$y = –2x$
8	y_i	9.91	13.08	16.05	18.92	22.05	$y = ax + b$	$y = 3x + 7$
9	y_i	5.93	12.05	18.08	23.90	30.07	$y = ax$	$y = 6x$
10	y_i	6.58	10.03	13.46	17.10	20.44	$y = ax + b$	$y = 3.5x + 3$
11	y_i	–2.58	–4.89	–7.57	–9.93	–12.05	$y = ax$	$y = –2.5x$
12	y_i	6.54	7.92	9.60	11.08	12.43	$y = ax + b$	$y = 1.5x + 5$
13	y_i	–1.03	–1.92	–3.08	–4.05	–4.96	$y = ax$	$y = –x$
14	y_i	4.91	7.04	9.10	11.09	12.92	$y = ax + b$	$y = 2x + 3$
15	y_i	1.55	2.93	4.60	6.07	7.43	$y = ax$	$y = 1.5x$
16	y_i	4.93	8.06	10.89	14.02	16.99	$y = ax + b$	$y = 3x + 2$
17	y_i	0.53	0.92	1.54	2.03	2.46	$y = ax$	$y = 0.5x$
18	y_i	3.94	5.02	6.08	6.92	8.08	$y = ax + b$	$y = x + 3$
19	y_i	0.92	2.05	2.97	4.04	5.09	$y = ax$	$y = x$
20	y_i	–2.91	–0.96	1.01	3.06	4.95	$y = ax + b$	$y = 2x – 5$
21	y_i	1.97	4.08	5.93	8.07	9.06	$y = ax$	$y = 2x$
22	y_i	0.94	4.07	6.91	10.06	12.90	$y = ax + b$	$y = 3x – 2$
23	y_i	–2.95	–6.03	–8.92	–12.09	–14.92	$y = ax$	$y = –3x$
24	y_i	–0.93	3.08	6.95	11.01	14.97	$y = ax + b$	$y = 4x – 5$
25	y_i	2.46	5.09	7.58	9.92	12.54	$y = ax$	$y = 2.5x$

Окончание табл. 6.3

№	x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	Уравнение	Приближенный ответ
26	y_i	–1.01	–0.04	0.96	2.05	2.93	$y = ax + b$	$y = x - 2$
27	y_i	–0.45	–1.04	–1.48	–2.07	–2.46	$y = ax$	$y = -0.5x$
28	y_i	–2.03	–0.93	0.05	0.93	2.09	$y = ax + b$	$y = x - 3$
29	y_i	–1.54	–2.96	–4.49	–5.98	–7.52	$y = ax$	$y = -1.5x$
30	y_i	–2.08	0.04	1.93	3.95	6.09	$y = ax + b$	$y = 2x - 4$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{P,N}$ в зависимости от числа наблюдений N при доверительной вероятности P = 95 %:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P,N}$, P=95 %	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0
$t_{P,N}$, P=68 %	2.0	1.4	1.3	1.2	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.0

Коэффициенты $\beta_{P,N}$ для расчета доверительной погрешности по размаху выборки $\Delta x = \beta_{P,N} R$ для числа наблюдений N доверительной вероятности P = 95 %:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P,N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Коэффициенты $u_{P,N}$ для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки N для доверительной вероятности P = 95 %:

N	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Коэффициенты $v_{P,N}$ для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объёма выборки N при доверительной вероятности P = 95 %:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P,N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29

Производные элементарных функций:

Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}
e^{ax}	ae^{ax}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Функция	Производная
$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-1/\sin^2 x$
$(u+v)'$	$u' + v'$
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$(u/v)'$	$(u'v - uv')/v^2$
$f = f(u(x))$	$f'_x = f'_u u'_x$

Морозов Вениамин Васильевич

Соботковский Борис Евгеньевич

Черненко Юлия Сергеевна

Шейнман Илья Львович

Обработка результатов эксперимента

Учебное пособие

Редактор И. Г. Скачек

Подписано в печать Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 4.0.

Тираж 1550 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5