

СПбГЭТУ “ЛЭТИ”

Конспект по физике за 1 семестр

Лектор: Ходьков Дмитрий Афанасьевич

Работу выполнили: студент группы 7372 Чеканов Александр
студент группы 7372 Когогин Виталий

2018 г

КИНЕМАТИКА (МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ)

Материальная точка – физическое тело, размерами которого можно пренебречь в условии задачи.

Система отсчета – система координат и прибор для измерения времени (часы).

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{i} x(t) + \vec{j} y(t) + \vec{k} z(t) \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \quad |\Delta z| \leq |\Delta S|$$

Скорость: $\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Скорость может изменяться как по величине, так и по направлению.

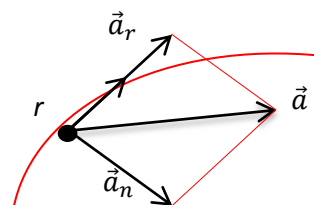
Мгновенная скорость: $\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Мгновенная скорость – это производная от координаты. Направлена по касательной к траектории.

Средняя скорость: $\vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Ускорение: $\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t) = \Delta \vec{V}$

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

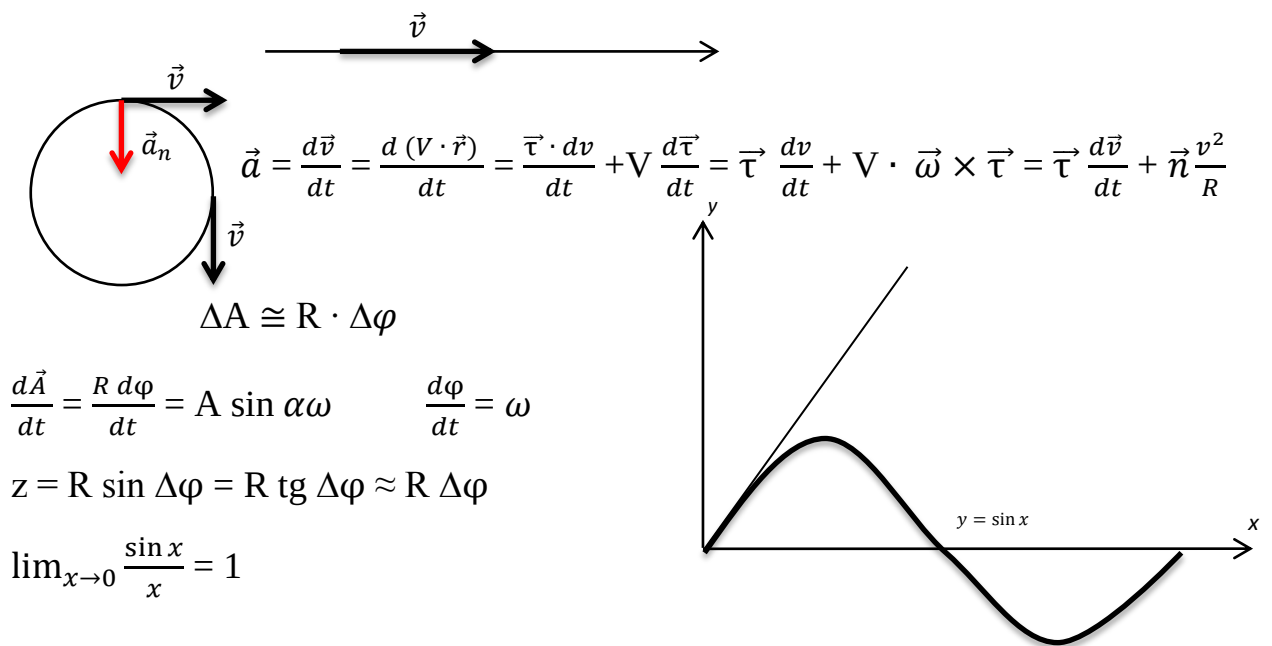


$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t) = \Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a}_\tau = a_\tau * \vec{\tau} \quad \vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n} \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенциальное ускорение – это составляющая вектора ускорения, направленная вдоль касательной к траектории в данной точке траектории движения. Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по модулю при криволинейном движении.

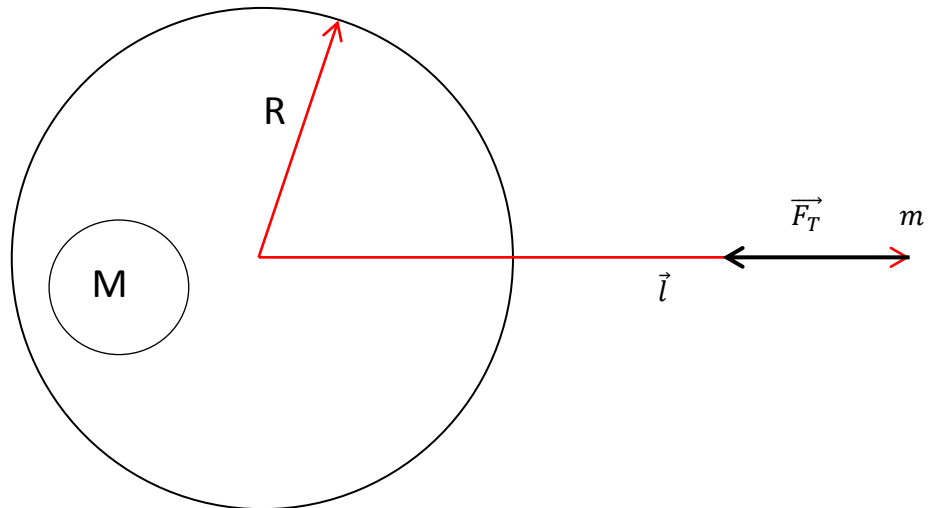
Нормальное ускорение – это составляющая вектора ускорения, направленная вдоль нормали к траектории движения в данной точке на траектории движения тела. То есть вектор нормального ускорения перпендикулярен линейной скорости движения



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{R d\varphi}{dt} = A \sin \alpha \omega \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$z = R \sin \Delta\varphi = R \operatorname{tg} \Delta\varphi \approx R \Delta\varphi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Пример: движение тела, брошенного под углом к горизонту

$$V_x = V_0 \cos \alpha \quad a_n = g \cos \alpha$$

$$V_y = V_0 \sin \alpha - gt \quad a_\tau = g \sin \alpha$$

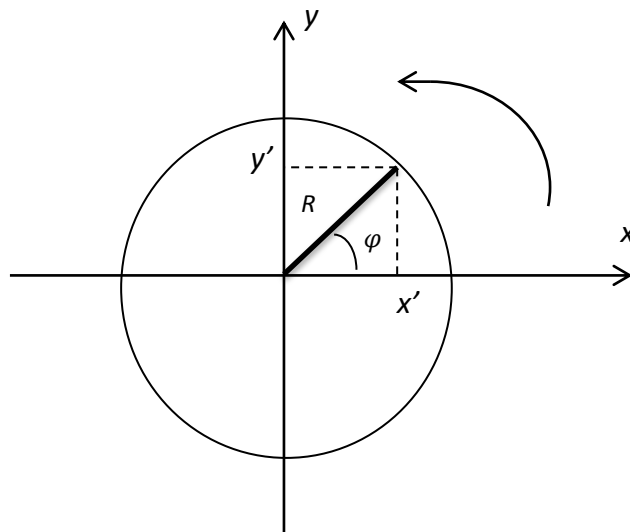
$$\cos \varphi = \frac{V_x}{V} = \frac{V_0 \cos \alpha}{\sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - gt)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{V_y}{V} = \frac{V_0 \sin \alpha - gt}{\sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - gt)^2}}$$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$



Аналогия:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \\ \vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2} \\ \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t \end{cases}$$

Связь между угловыми и линейными характеристиками:

$$\vec{r} \rightarrow \varphi \quad S = \varphi R$$

$$\vec{v} \rightarrow \omega \quad V = \omega R$$

$$\vec{a} \rightarrow \varepsilon \quad a_{\tau} = \varepsilon R \quad a_n = \omega^2 R$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2}$$

$$|a_n| = \frac{v^2}{R}$$

ДИНАМИКА

Законы Ньютона:

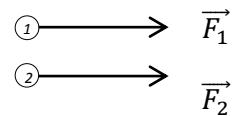
1 з-н Ньютона:

Система, связанная со свободным телом, на которое не действуют никакие силы (либо они скомпенсированы), или движущаяся относительно него с поступательной скоростью, называется *инерциальной*.

2 з-н Ньютона:

В инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.

$$\vec{a} \sim \frac{\vec{F}}{m}$$



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$m \vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

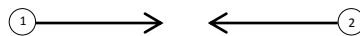
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

3 з-н Ньютона:

Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению

$$\vec{F}_{k_i} = - \vec{F}_{i_k}$$



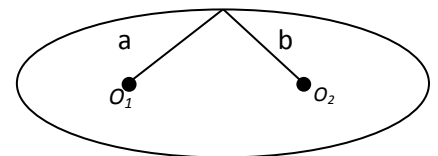
Законы Кеплера:

1й закон:

Все планеты Солнечной Системы двигаются по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

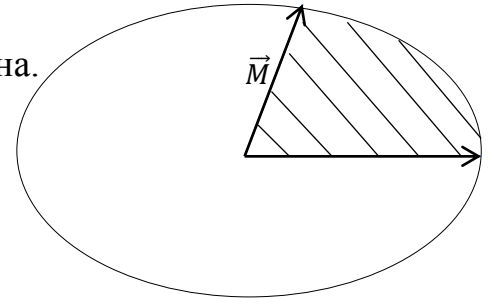
$$a + b = \text{const}$$

(O_1 , O_2 – фокусы эллипса)

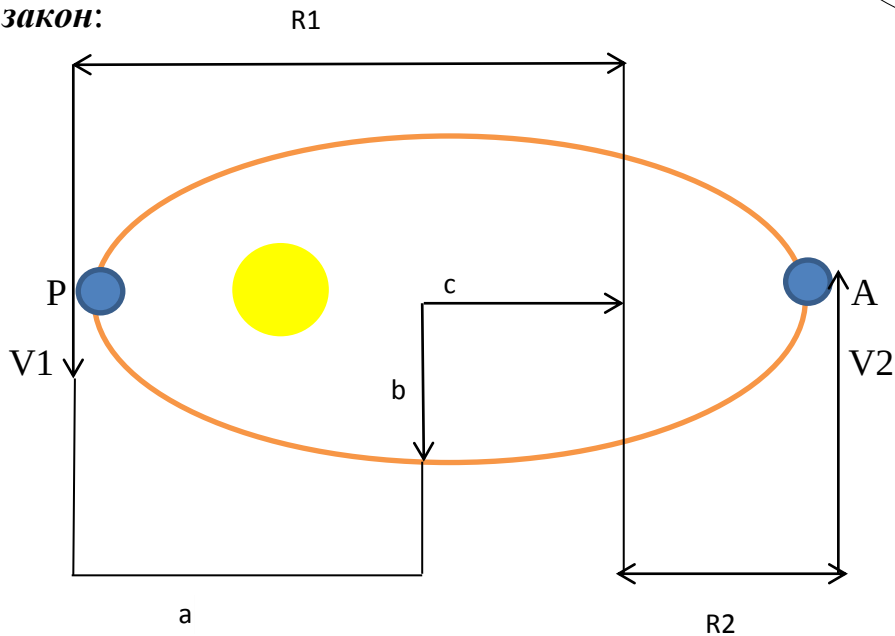


2й закон:

Секторная скорость всех небесных тел постоянна.
(За равные промежутки времени радиус-вектора «заштриховывает» одну и ту же площадь)



3й закон:



Квадраты периодов обращения вокруг

$$\frac{\vec{T}_1^2}{\vec{T}_2^2} = \frac{\vec{R}_1^3}{\vec{R}_2^3}$$

Солнца относятся как кубы больших полуосей.

⇒ Сила гравитационного взаимодействия обратно пропорциональна R^2

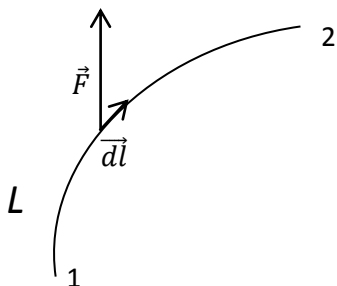
$$F = \frac{mv^2}{R} \sim \frac{R^2}{T^2 R} \sim \frac{R}{R^2 R} \sim \frac{1}{R^2}$$

Работа:

Работа – циркуляция силы вдоль L

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

траектории перемещения.



$$A_{1,2} = \sum dA_i$$

$$A_{1,2} = \int \vec{F} d\vec{e}$$

Потенциальные и силовые поля:

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей, характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.

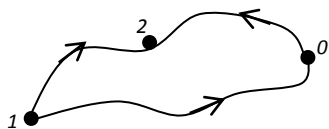
Такие поля называются потенциальными, а силы, действующие в них, — консервативными. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется диссипативной; ее примером является сила трения.

Силовым полем называется — скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил) и от перемещения тела.

Потенциальная энергия — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Кинетическая энергия механической системы — это энергия механического движения этой системы.

Потенциальная энергия U — работа сил по перемещению из 1 в 0. Тогда:



$$A_{1-2} = A_{1-0} + A_{0-2}$$

$$U(1) - U(2) = -\Delta U$$

$$A = -\Delta U \text{ (только в потенциальном поле)}$$

Кинетическая энергия:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m\vec{a} \cdot d\vec{l} = \frac{dv}{dt} \cdot m \cdot d\vec{l} = d\vec{v} \cdot m \cdot \vec{V} = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Элементарная работа — приращение скалярной величины:

$$dA = E_k \rightarrow \text{всегда}$$

$A_{1,2}$ — изменение кинетической энергии

$$A_{1,2} = \Delta E_k$$

В потенциальном поле: $\begin{cases} -\Delta U = \Delta E_k \\ \Delta(U + E_k) = 0 \end{cases}$

Связь между силой и потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\nabla U$$

Градиент:

$f(x, y, \dots)$ - функция многих переменных

$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ - в трехмерном случае

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Градиент – вектор, направленный в сторону наибыстрейшего возрастания функции.

Для центрального поля (гравитационное, электростатическое) точку O выбирают в бесконечности.

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F}_z = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cos \alpha \, dl = F \, dr$$

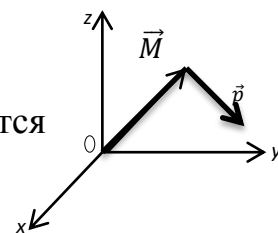
$$U = \int F \, dr$$

Момент импульса:

Моментом импульса материальной точки называется

физическая величина, равная векторному

произведению радиус-вектора на импульс.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} - \text{момент силы}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=0}^n \vec{N}_i$$

Если $N=0$ (сил нет или $\sum \vec{N}_i = 0$), то $L = \text{const}$

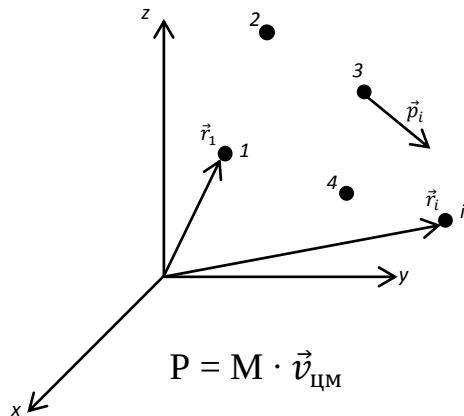
$$|\vec{L}| = r \cdot mV = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{dt} \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{dS}{dt} \Rightarrow \text{т.к. } L = \text{const, то } \frac{dS}{dt} = \text{const}$$

2й закон Кеплера (в центральном поле)

Динамика системы материальных точек

Центр масс:

Центр масс — геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц, как целого



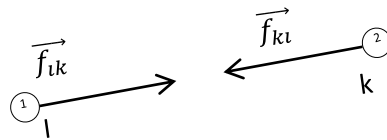
$$R_i = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

(полная масса системы на скорость центра масс)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{внеш.}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{f}_{ik}$$



$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum d\vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{f}_{ik}$$

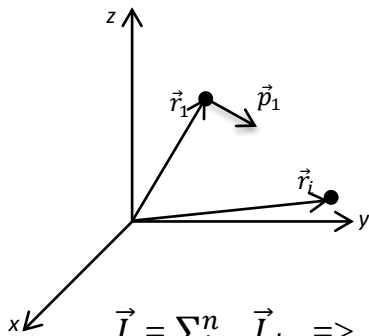
Последняя сумма равна 0, т.к. все силы компенсируются.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}}$$

Если система замкнутая (внешних сил нет) или сумма внешних сил = 0, то $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const}$

Закон сохранения импульса:

В замкнутой системе при любых процессах полный импульс остается неизменным.



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}^{**}$$

$$^{**} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{f}_{ki}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i \neq k}^n (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} - \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n (\vec{f}_{ik} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)) = 0$$

т.к. $\vec{f}_{ik}$ коллинеарно $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{внеш}}$ если сумма моментов сил = 0 (система замкнута или по другой причине), то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{const}$

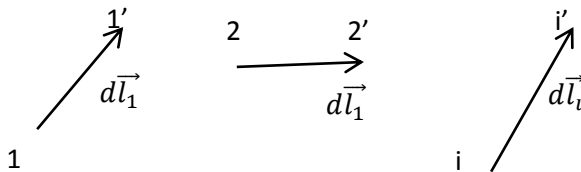
З-н сохранения:

Полный момент силы замкнутой системы остается неизменным.

З-н сохранения энергии:

В замкнутой системе полная энергия остается неизменной.

При перемещении материальных точек за момент времени dt меняется конфигурация $\Rightarrow$ совершается работа: $dA_i = \vec{F}_i d\vec{l}_i$



$$dA_i^K = dA_i^{F_{\text{потенц}}} + dA_i^{F_{\text{диссипативн}}} + dA_i^{F_{\text{внеш}}}$$

$$dA_i^K = \sum dA_i^{\Pi} \Rightarrow dA_i^{\Pi} = -dU, \quad dA_i^{\Pi} = dE_i^K$$

$$dA_i = -dU + dA_i^{\text{дис}} + dA_i^{\text{внеш}}$$

(изменение кинетической энергии i-той материальной точки)

$$d(E_i^k + U_i) = dA_i^{\text{дис}} + dA_i^{\text{внеш}}$$

$$\Delta(E_i^k + U_i) = \Delta A_i^{\text{дис}} + \Delta A_i^{\text{вн}}$$

Если $\Delta A_i^{\text{дис}} + \Delta A_i^{\text{вн}} = 0$, то $(E_i^k + U_i) = 0$, $(E_i^k + U_i) = \text{const}$

Понятие внутренней энергии системы материальных точек

Внутренняя энергия — это не специфический вид энергии, а совокупность тех изменяемых составных частей полной энергии системы, которые следует учитывать в конкретной ситуации

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{цм}} + \vec{v}_0$$

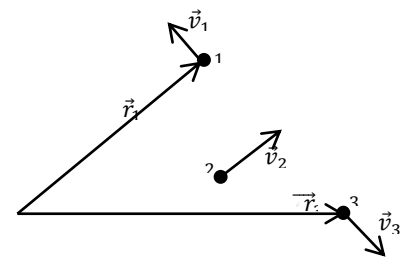
$$E = E_{\text{кин}} + U \Rightarrow E_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + U_i \Rightarrow E_i = \sum E_i = \sum \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + U_i \right)$$

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} (\vec{v}_{0i} + \vec{v}_{\text{цм}})^2 = \sum \frac{m_i \vec{v}_{0i}^2}{2} + \sum m_i \vec{v}_{0i} \vec{v}_{\text{цм}} + \sum m_i \vec{v}_{\text{цм}}^2$$

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \vec{v}_{0i}^2}{2} + \frac{M \vec{v}_{\text{цм}}^2}{2}$$

$$E = \frac{M v_{\text{цм}}^2}{2} + U + \sum \frac{m_i \vec{v}_{0i}^2}{2}$$

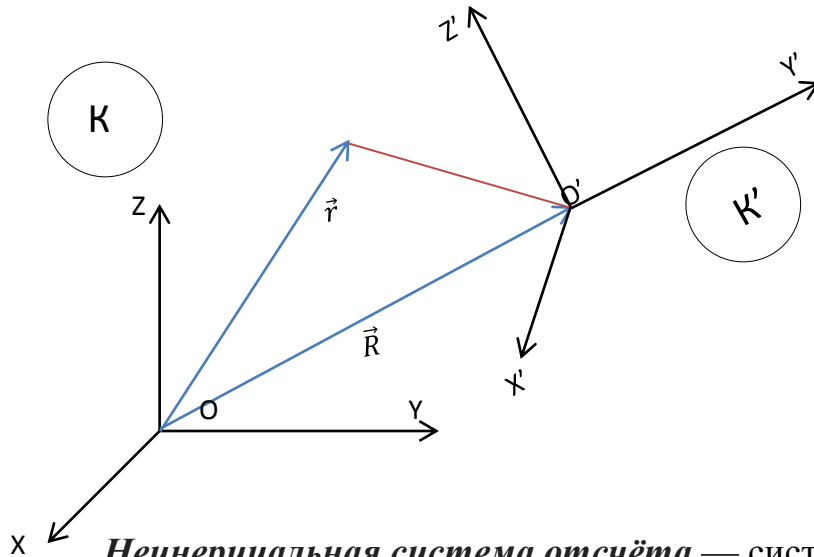
Система центра масс



$$\bullet \longleftarrow \bullet \quad \begin{cases} \vec{v}_{01} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{цм}} \\ \vec{v}_{02} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{цм}} \end{cases} \quad \vec{v}_{\text{цм}} = \frac{m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} v_{01} = v_1 - \frac{m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ v_{02} = v_2 - \frac{m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p}_{01} = -\frac{m_1 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{p}_{02} = \frac{m_1 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Неинерциальные системы отсчета



Неинерциальная система отсчёта — система отсчёта, движущаяся с ускорением или поворачивающаяся относительно инерциальной. Второй закон Ньютона также не выполняется в неинерциальных системах отсчёта. Для того чтобы уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта по форме совпадало с уравнением второго закона Ньютона, дополнительно к «обычным» силам, действующим в инерциальных системах, вводят силы инерции:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{dt} = \frac{d\vec{i}'}{dt}x' + \frac{d\vec{j}'}{dt}y' + \frac{d\vec{k}'}{dt}z' + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{i}'x' + \vec{\omega} \times \vec{j}'y' + \vec{\omega} \times \vec{k}'z' + \vec{i}'v'_x + \vec{j}'v'_y + \vec{k}'v'_z \\ = \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ в ИСО} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dv_0}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \frac{dv_0}{dt} = \vec{a}_0$$

$$\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\Pi} + \vec{a}_K, \quad \text{где } \vec{a}' - \text{относительное ускорение;}$$

$$\vec{a}_{\Pi} = a_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \vec{a}_{\Pi} - \text{переносное ускорение;}$$

$$\vec{a}_K = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \vec{a}_K - \text{ускорение Кориолиса.}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{r}'\omega^2 \quad - > a_{\text{центростремительная}}$$

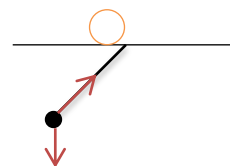
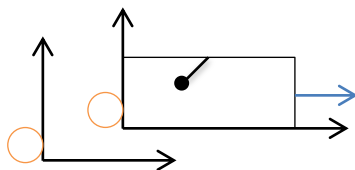
$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{\Pi} + m\vec{a}_K \quad m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{равнод}} \quad m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{\Pi} - m\vec{a}_K$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{равнод}} + \vec{\phi} \quad \vec{\phi} = -m(\vec{a}_{\Pi} + \vec{a}_K) \quad - \text{сила инерции}$$

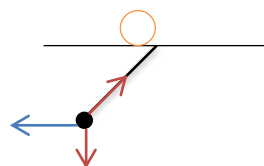
«Сила» инерции не связана с действием на материальную точку каких-либо сил: величина (направление) этой «силы» связана с движением (характером) ИСО относительно НИСО.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

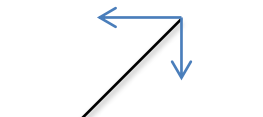
$$\vec{\phi} = -m\vec{a}$$



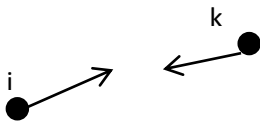
$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{\phi} = 0$$



$$\tan \alpha = \frac{mg}{ma}$$



МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



$$|\vec{r}_i - \vec{r}_k| = \text{const}$$

$$\omega_i = \text{const}$$

$$\vec{L} = |I|\vec{\omega}; \quad I = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} - \text{тензор момента инерции}$$

$$L = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum m_i \times \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ = \sum m_i [\vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i \times (\vec{r}_i \times \vec{\omega})] \Rightarrow$$

$$L = \vec{i}L_x + \vec{j}L_y + \vec{k}L_z$$

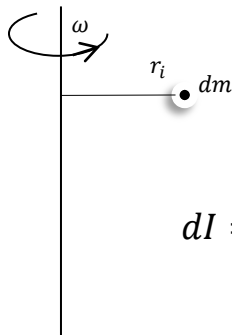
$$L_x = \sum m_i \cdot [\omega_x r_i^2 - x_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \\ = \sum m_i \cdot [\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \Rightarrow$$

$$L_y = \sum m_i \cdot [-\omega_x y_i x_i + \omega_y (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z y_i z_i] \Rightarrow$$

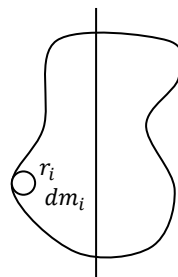
$$L_z = \sum m_i \cdot [-\omega_x z_i x_i - \omega_y z_i y_i + \omega_z (r_i^2 - z_i^2)]$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \|I\| \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \begin{cases} I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) \\ I_{yy} = \sum m_i (x_i^2 - y_i^2) \\ I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 - z_i^2) \end{cases}$$

Момент инерции относительно оси вращения



$$dI = r^2 dm$$



$$I = \sum dI_i$$

$$I = \int_{\Omega} dI_i$$

$$I = \int_{\Omega} r^2 dm$$

Вычисление моментов инерции

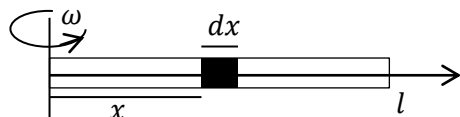
1. Тонкий стержень



$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}} \right] - \text{линейная плотность}$$

$$dI = x^2 dm = x^2 \lambda dx \Rightarrow I = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{\lambda x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{l^3}{4} = \frac{\lambda l^3}{12} \Rightarrow I = \frac{ml^2}{12}$$

момент инерции стержня, вращающегося относительно оси, проходящей через центр

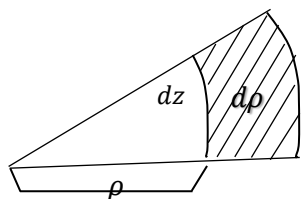


$$dI = x^2 dm = x^2 \lambda dx \Rightarrow I = \lambda \int_0^l x^2 dx = \frac{\lambda x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\lambda l^3}{3} \Rightarrow I = \frac{ml^2}{3}$$

момент инерции стержня, вращающегося относительно оси, проходящей через его край.

2. Круглый диск

$\delta = \frac{dm}{ds}$ – поверхностная плотность [кг/м²]



$$dS = d\rho \cdot dz \quad z \sim \rho \sin \alpha \quad d\varphi \sim \rho d\varphi$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi \Rightarrow dI = \sigma \rho^3 d\rho d\varphi$$

$$I = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\varphi = 2\pi\sigma \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi\sigma \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi\sigma R^4}{2}$$

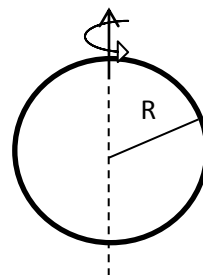
$$I = \frac{MR^2}{2}$$

3. Полая труба или обруч

$$I = MR^2$$

4. Шар

$$I = \frac{2MR^2}{5}$$



Теорема Гюйгенса-Штейнера:

Теорема Гюйгенса-Штейнера – момент инерции тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого

тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пусть имеется произвольное тело с осью вращения, проходящей не через центр масс $I = I_0 + Md^2$

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{N}^{\text{внеш}} \qquad I \frac{d\omega}{dt} = \sum \vec{N}^{\text{вн}} \qquad I\varepsilon = \sum \vec{N}^{\text{вн}}$$

Аналог второго закона Ньютона для случая вращения вокруг фиксированной оси.

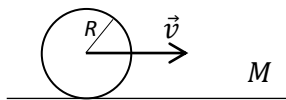
Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела складывается из кинетических энергий отдельных элементов. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия элемента dm_i , находящегося на расстоянии r_i от оси, равна

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \frac{dm_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{dm_i}{2} \vec{v}_i (\vec{v}_0 + \vec{v}_{0i}) = \sum \frac{dm_i}{2} \vec{v}_i \vec{v}_0 + \sum \frac{dm_i}{2} \vec{v}_i \vec{v}_{0i} = \\ &= \frac{\vec{v}_0}{2} \sum dm_i \vec{v}_i + \sum \frac{dm_i}{2} \vec{v}_i \vec{\omega} \times \vec{r} = P \frac{\vec{v}_0}{2} + \sum \frac{dm_i}{2} \vec{\omega} [\vec{r}_i, \vec{v}_i] \\ &= P \frac{\vec{v}_0}{2} + \sum \frac{1}{2} \vec{\omega} r_i \times (dm \cdot v_i) = \\ &= P \frac{\vec{v}_0}{2} + \frac{1}{2} \omega \vec{L} \end{aligned}$$

Кинетическая энергия при плоско-параллельном движении

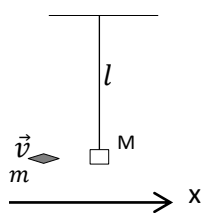
Цилиндр или диск (качение без проскальзывания)



$$E_k = \frac{M \vec{v}_{цм}^2}{2} + \frac{I \vec{\omega}^2}{2}$$

$$E_k = \frac{M v^2}{2} + \frac{M R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{2} m v^2$$

Баллистический маятник



$$m \vec{v} = (m + M) \vec{u}$$

$$X: u = \frac{m \vec{v}}{m + M}$$

$$\frac{(m + M) u^2}{2} = (m + M) g h \Rightarrow h = \frac{u^2}{2g}$$

$$\cos \alpha = \frac{l - h}{l} = 1 - \frac{h}{l}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - m v^2}{2g(m + M)^2 l}$$

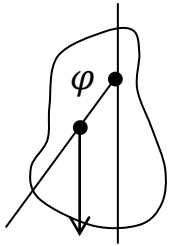
$$\frac{m^2}{2} = \frac{(m + M) u^2}{2} + Q \text{ (если есть } Q, \text{ но его нет)}$$

Физический маятник:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{N}^{\text{BH}} \quad I \frac{d\omega}{dt} = \vec{N}^{\text{BH}} \quad ml^2 \frac{d\omega}{dt} = mg \cdot l \sin \varphi, \quad \varphi \ll 1$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad \ddot{\varphi} + \frac{l}{g} \varphi = 0$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{\text{BH}} \quad I\ddot{\varphi} = mgd \sin \varphi \quad \ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I} \varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Уравнения Эйлера:

Эйлер предложил перейти в НИСО, связанную с главными осями вращения при рассмотрении движения тела.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}' + \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{N}^{\text{BH}}$$

Закон сохранения импульса или же основное уравнение динамики вращательного движения, записанное в координатах.

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) = N_x^{\text{BH}} \\ I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) = N_y^{\text{BH}} \\ I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = N_z^{\text{BH}} \end{cases}$$

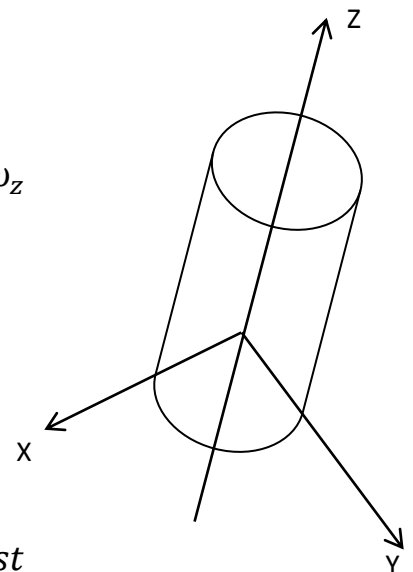
1. Шар (в космосе)

$$I_x = I_y = I_z \quad \dot{\omega}_x = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0 \\ \omega = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$$

2. Тело вращения

$$I_x = I_y = I_I, \quad I - \text{ось вращения} \\ I_z = I_{II}$$

$$\begin{cases} I_z \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{II} - I_I) = 0 \\ I_z \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_I - I_{II}) = 0 \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \quad \omega_z = \text{const}$$



$$\text{Пусть } \frac{\omega_z(I_{II}-I_I)}{I_I} = \Omega$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \omega_y \Omega = 0 \\ \dot{\omega}_y - \omega_x \Omega = 0 \end{cases} \quad \ddot{\omega}_y - \dot{\omega}_x \Omega = 0 \quad \dot{\omega}_x = \frac{\ddot{\omega}_y}{\Omega}$$

$$\frac{\ddot{\omega}_y}{\Omega} + \omega_y \Omega = 0 \quad \ddot{\omega}_y + \omega_y \Omega^2 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_y = A \sin \Omega t \\ \omega_x = -A \cos \Omega t \end{cases} \quad \Omega - \text{частота прецессии}$$

Первая и вторая космическая скорость

Первая космическая скорость — минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты. Первая космическая скорость для орбиты, расположенной вблизи поверхности Земли, составляет 7,91 км/с

Вторая космическая скорость — наименьшая скорость, которую необходимо придать объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него

$$F_T = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad h \rightarrow 0 \quad R \gg h \quad F_T \approx G \frac{mM}{R^2} = mg \quad g = G \frac{M}{R^2}$$

$$F_T = ma_{\text{ц}} \quad v_I = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

v_{II} – скорость, с которой нужно бросить тело, чтобы забыть про него.

$$v_{II} = \sqrt{2G \frac{M}{R}} \quad v_{II} = \sqrt{2} v_I$$

Геостационарная орбита

$$F_T = ma_{\text{ц}} \quad G \frac{mM}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h) \quad G \frac{mM}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{(R+h)} \quad v^2 = G \frac{M}{(R+h)}$$

$$G \frac{M}{(R+h)^3} = \omega^2 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad G \frac{MT^2}{4\pi^2} = (R+h)^3 \quad h = \sqrt[3]{G \frac{MT^2}{4\pi^2}} - R$$

Механические колебания

Гармонические колебания

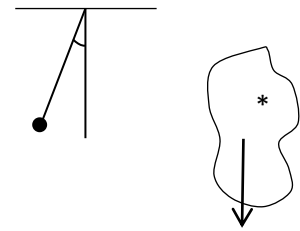
Гармоническое колебание – это периодическое колебание, при котором координата, скорость, ускорение, характеризующие движение, изменяются по закону синуса или косинуса. Уравнение гармонического колебания устанавливает зависимость координаты тела от времени

Гармонический осциллятор – любая физическая система, анализ которой сводится к уравнению вида: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{\text{вн}} \quad ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

$$\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \sim \alpha \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi =$$

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0$$



$z = z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где z_0 - амплитуда, φ - начальная фаза, $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза

Формула $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ отражает бесконечный колебательный процесс, связанный с постоянным переходом одной энергии в другую.

Затухающие колебания

Колебания с непрерывно уменьшающейся во времени амплитудой вследствие рассеяния энергии называются *затухающими*. При достаточно малых скоростях сила трения пропорциональна скорости тела и направлена против движения.

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = g - \frac{F_a}{m} - \frac{\alpha v}{m} \quad v_0(0) = v_0 - \text{начальное условие}$$

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{F_a}{m} - \frac{\alpha v}{m}} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dv}{g - \frac{F_a}{m} - \frac{\alpha v}{m}} \Rightarrow -\frac{m}{\alpha} \ln \left| g - \frac{F_a}{m} - \frac{\alpha v}{m} \right| = t + C$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = x_0 e^{\alpha t} \quad \dot{x} = x_0 \alpha e^{\alpha t} \quad \ddot{x} = x_0 \alpha^2 e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Чтобы колебания существовали: $\omega_0 \gg \gamma \Rightarrow$ способность к колебанию много больше затухания.

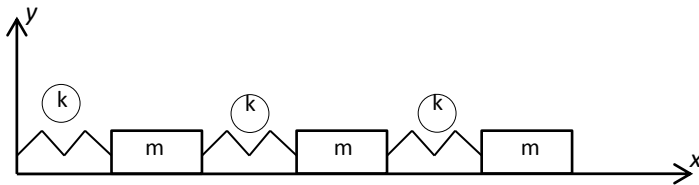
$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} \quad x = C_1 x_0 e^{\alpha_1 t} + C_2 x_0 e^{\alpha_2 t} \quad x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Добротность и логарифмический декремент затухания

$$Q = 2\pi \frac{\omega(t)}{\omega(t) - \omega(t+T)} \quad \delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

$$\omega(t) \sim x^2 \quad Q \approx \frac{\pi}{\gamma T} \approx \frac{\pi}{\delta} \quad \delta = \ln \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} \cong \gamma T$$

Волны в упругой среде



отклоняем и отпускаем первый

$$x(z, t) = x(0, t - z/v) \quad x = x_0 \cos(\omega t - kz) = x_0 \cos \omega \left(t - \frac{k}{\omega} z \right)$$

$$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ v = \frac{\omega}{k} \end{cases}$$

λ – линейная плотность, T – сила натяжения

$$\lambda = \frac{M}{l} \quad y: \frac{mv^2}{R} = T\alpha \quad m = \lambda \Delta l \quad \Delta l = R\alpha \quad \frac{\lambda R \alpha v^2}{R} = T\alpha \quad v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

Волновое ускорение

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = -\omega x_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 x(k, t)}{\partial z^2} = -k^2 x_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 x(k, t)}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2}$$

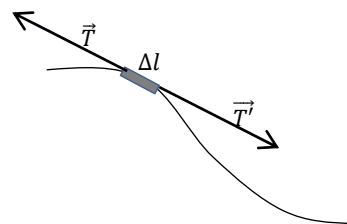
$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2}$ – волновое уравнение; для частного случая, когда волна распространяется вдоль z .

Для трехмерного колебания: $\nabla^2 x(z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad |\vec{a}| = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2}$$

$$\sum |\vec{F}| \sim \left(\frac{\partial x(z+\Delta z, t)}{\partial z} - \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \cdot \Delta z \sim \lambda \Delta z \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z} \cdot \Delta z \rightarrow v^2 = \frac{T}{\lambda}$$



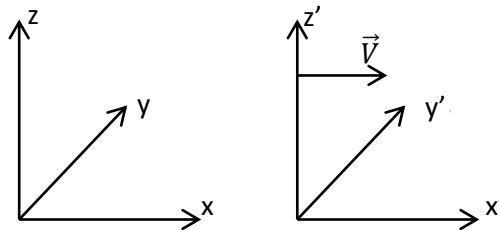
ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Преобразования Галилея:

В классической механике и нерелятивистской квантовой механике преобразования координат и скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Преобразования Галилея опираются на принцип относительности Галилея, который подразумевает одинаковость времени во всех системах отсчета («абсолютное время»).

Часы идут синхронно; K' движется вдоль x с постоянной скоростью

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} V_x = V'_x + V \\ V_y = V'_y \\ V_z = V'_z \end{cases}$$



Преобразования Галилей => преобразования скоростей

2. Преобразования Лоренца

Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены. Эти новые преобразования должны установить связь между координатами (x, y, z) и моментом времени t события, наблюдаемого в системе отсчета K , и координатами (x', y', z') и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в системе отсчета K' .

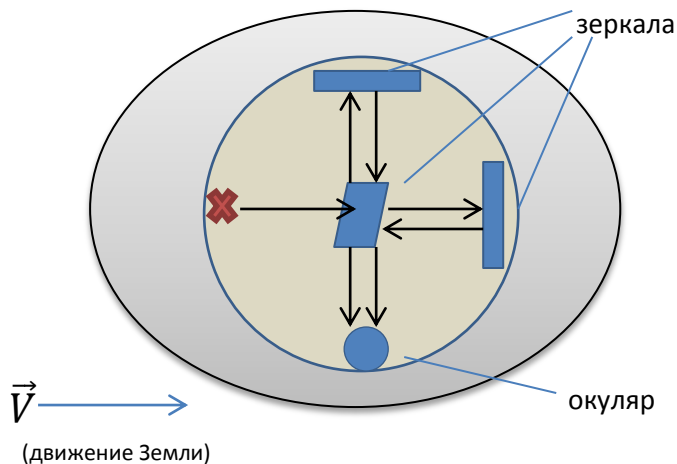
Кинематические формулы преобразования координат и времени в СТО называются преобразованиями Лоренца.

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

3. Опыт

Предположение: кроме атомов и молекул существует эфир – «бульон», в котором плавает наша Вселенная; его колебания – есть свет; Земля проходит сквозь эфир.

Рассмотрим платформу из свинца в ванночке с ртутью; на ней – интерферометр.



Лучи создают интерференционную картину в окуляре

В результате опыта ожидаемого смещения не наблюдается

В итоге, создаются постулаты теории относительности:

1. Все системы отсчета равноправны, а инерциальные – эквивалентны;
2. В природе существует предельная скорость распространения информации – *скорость света* – и она одинакова во всех системах отсчета: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Первый постулат означает, что в природе не существует *эфира*, так как система отсчета, связанная с эфиром, была бы «особенная».

Релятивистская энергия

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1$$

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

E – полная энергия

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_{\text{покоя}} + E_{\text{к}}$$

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - mc^2$$

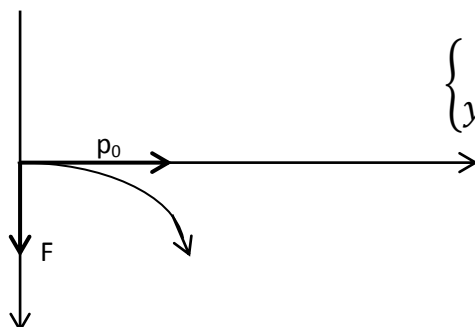
4-вектор энергии импульса

$$p_x = m \frac{dx}{d\tau}; \quad p_y = m \frac{dy}{d\tau}; \quad p_z = m \frac{dz}{d\tau}; \quad E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}; \quad \vec{V} = \vec{p} \frac{c^2}{E}$$

τ – собственное время системы, где объект покоится;

$$\begin{cases} p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{\beta}{c} E' \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ E = \gamma (E' + \beta c p'_x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma (E - \beta c p_x) \end{cases}$$

Ускорение частицы поперечным полем



$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m} \end{cases} \quad t = \frac{x}{V_0} \Rightarrow y = \frac{F}{2mV_0^2} x^2$$

$$V_x = \frac{p_0 c^2}{\left(\sqrt{\varepsilon_0 + c^2 F^2 t^2} \right)} \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$V_y = \frac{c^2 F t}{\sqrt{\varepsilon_0 + c^2 F^2 t^2}} \quad E = \sqrt{\varepsilon_0 + c^2 F^2 t^2}$$

$$x(t) = \int_0^t V_x(t') dt' \quad x(t) = \frac{p_0 c}{F} \int_0^t dt / \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{cF} + t^2} = \frac{p_0 c}{F} \left(\frac{cF}{\varepsilon_0} t \right)$$

$$y(t) = \int_0^t V_y(t') dt' \quad y(t) = \frac{1}{F} \left(\sqrt{\varepsilon_0 + c^2 F^2 t^2} - \varepsilon_0 \right) \approx \frac{\varepsilon_0}{2F} \frac{F^2}{p_0^2 c^2} x^2 = F x^2 / 2mV_0^2$$

Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли

Речь идет о несжимаемой жидкости

$$\Delta E = A_{\text{вн}} \quad \Delta E_k = \frac{dmV_2^2}{2} - \frac{dmV_1^2}{2} \quad \Delta E_m = dmgh_2 - dmgh_1$$

$$A_{\text{вн}} = \vec{F}\vec{V}\Delta t$$

$$\frac{\rho V_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho V^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$$

Уравнение Бернулли – обобщение закона сохранения энергии для течения жидкости.

ТЕРМОДИНАМИКА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

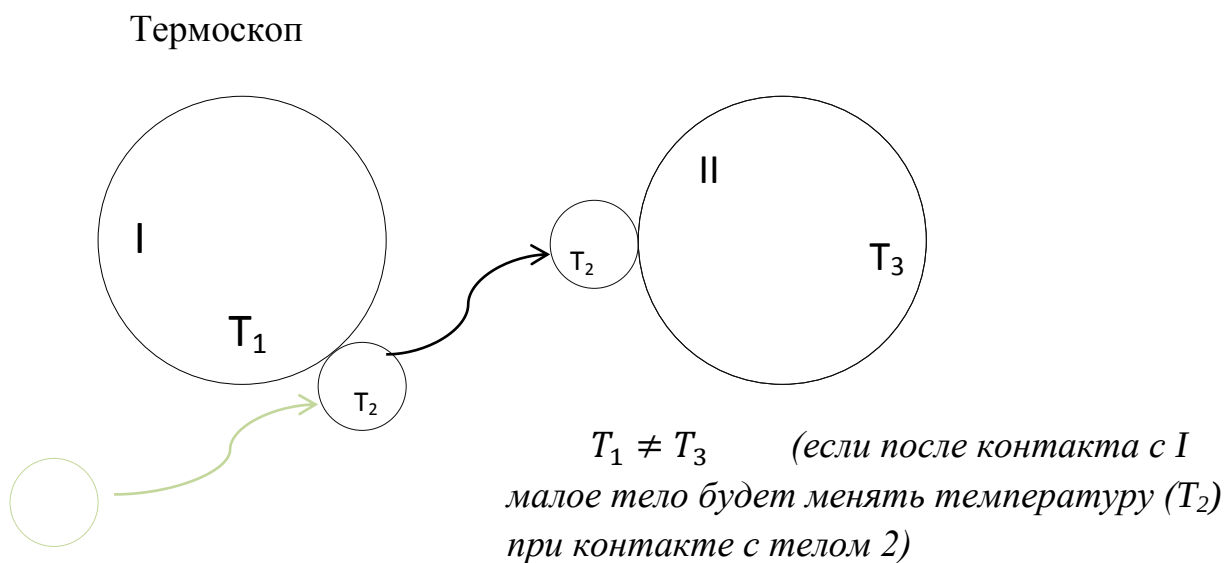
Тепловое и термодинамическое равновесие

Физическая система называется *замкнутой* (или системой в адиабатической оболочке), если она не имеет теплового контакта с внешней средой.

Каким бы ни было начальное состояние замкнутой системы, она в итоге придет в состояние *термодинамического равновесия*.

Термодинамическое равновесие – состояние, в котором все физические составляющие одинаковые.

Температура – макроскопическая характеристика, которая характеризует степень нагретости тела.



1е начало термодинамики

$$|\vec{F}| = p ds \quad \delta A = p ds dh = p dV \quad A_{1,2} = \sum_{i=1}^N \delta A \cong \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} p(v) dV$$

Внутренняя энергия

Внутренней энергией системы называется функция состояния, приращение которой во всяком процессе, совершенном системой в адиабатической оболочке, равно работе внешних сил

$df \rightarrow f$ – функция состояния системы

$\delta g \rightarrow g$ – не функция состояния системы

Количество теплоты

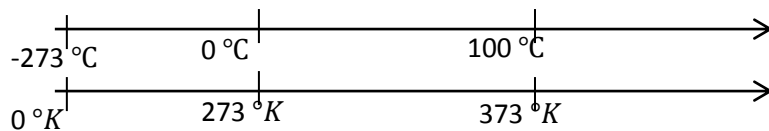
Процесс обмена внутренней энергией при взаимодействии тел, не сопровождающийся совершением работы, называется *теплообменом*.

Энергия, передающаяся телу окружающей средой в результате теплообмена, называется *количеством теплоты*.

1е НАЧАЛО: количество теплоты, передаваемое системе, идет на изменение ее внутренней энергии и совершение макроскопической работы (по изменению объема).

Теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T}$$



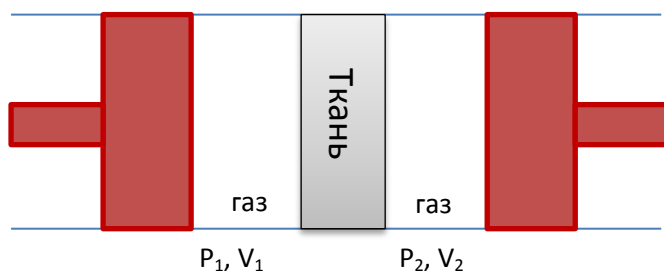
$$C = \frac{\delta Q}{m \delta T} - \text{удельная теплоемкость}$$

$$C = \frac{\delta Q}{\nu \delta T} - \text{молярная теплоемкость}$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v + \left(p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right) \frac{dV}{dT}$$

$U = U(V, T)$ – уравнение состояния

Опыт и закон Джоуля



$$p_2 < p_1; \quad V_2 > V_1$$

$$p_1 V_1 + U_1 = p_2 V_2 + U_2 \quad I = pV + U = \text{const} - \text{энтальпия}$$

$$U = U(T) \quad C = C_v + p \frac{R}{p} = C_v + R \quad C_p - C_v = R - \text{для идеального газа}$$

Виды процессов в первом начале

$$\delta Q = 0 = C_v dT + p dV \quad 0 = dU + \delta A \quad dT = -\frac{pdV}{C_v}$$

Адиабатический процесс

Для идеального газа: $pV = RT$

$$0 = C_v dT + p dV \quad dU = C_v dT$$

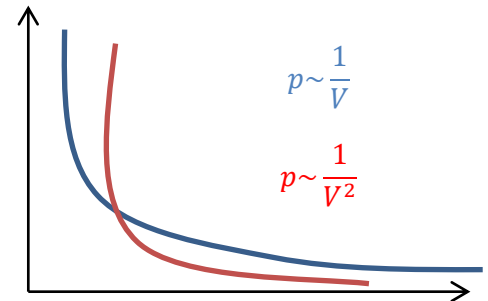
$$dT = -\frac{pdV}{R} = \frac{pdV + Vdp}{C_p - C_v}$$

$$T = \frac{pV}{R}$$

$$-\frac{pdV}{C_v} = \frac{pdV + Vdp}{C_p - C_v} \Rightarrow -C_p pdV + C_v pdV = C_v pdV + C_v Vdp \quad \frac{dp}{p} = -\frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V} \Rightarrow pV^\gamma = \text{const} - \text{уравнение Пуассона (адиабаты)}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}; \quad \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const}$$



Все процессы (частный случай)

$$n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_v}$$

N	Процесс
0	Изобарный ($p = \text{const}$)
1	Изотермический ($T = \text{const}$)
γ	Адиабатный ($\delta Q = 0$)
$\pm\infty$	Изохорный ($V = \text{const}$)

Для идеального газа:

$$p = \frac{\frac{2}{3}nmV^2}{2} = \frac{2}{3}nE_k$$

$$E_k = \frac{3}{2}kT \quad p = NkT$$

$$k = 1,38 * 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

$$U(T) = \frac{3}{2} \nu RT$$

Число степеней свободы молекул:

Одноатомный газ: $i = 3$;

Многоатомный газ: $i = 6$;

Двухатомный газ: $i = 5$;

В произвольном случае для идеального многоатомного газа:

$$U(T) = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$$

Работа при различных процессах

$$dA = p dV$$

- Изохорный процесс: $V = \text{const}$ $A = 0$
- Изобарный процесс: $p = \text{const}$ $A_{1,2} = p(V_2 - V_1)$
- Изотермический процесс: $pV = \text{const}$; $T = \text{const}$; $dA = p dV = \frac{\nu RT}{V} dV$

$$A_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu TR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT * \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + \text{const}$$

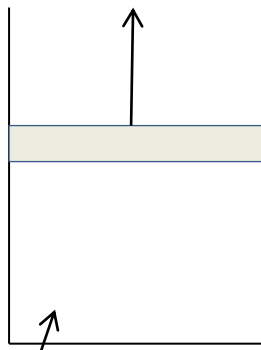
- Политропный процесс:

$$pV^n = p_1 V_1^n = p_2^n = \dots \quad p = \frac{p_1 V_1^n}{V^n} \quad dA$$

$$= p dV - p_1 V_1^n \frac{dV}{V^n}$$

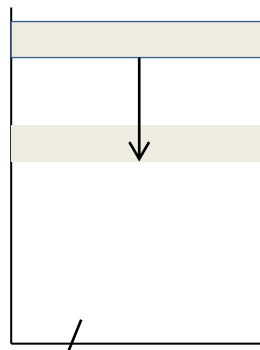
$$A_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1 \frac{dV}{V^n} = p_1 V_1 \left(\frac{V^{1-n}}{1-n} \right) \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right)$$

Можно ли создать машину, которая будет только потреблять энергию?



$$\mu = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_x}{Q_H}$$

(Невозможно, чтобы КПД было 100%)



$$\begin{cases} Q_1 = U_2 - U_1 + A_{1,2} \\ -Q_2 = U_1 - U_2 - A_{1,2} \end{cases}$$

$$Q_1 - Q_2 = A_{1,2} - A_{2,1} = A$$

$$Q_x = 0 \Rightarrow \mu = 1$$

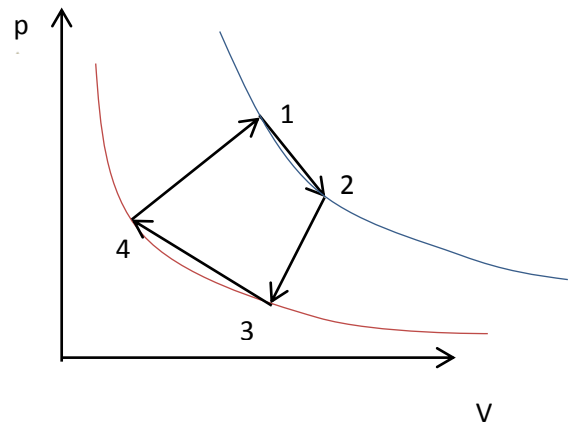
Невозможно существование такой действующей тепловой машины, единственным результатом которой было бы совершение работы за счет охлаждения теплового резервуара.

Теорема Карно

Из всех тепловых машин, использующих данный холодильник и нагреватель, наибольшим КПД будет обладать машина, работающая по циклу Карно, причем КПД зависит только от T_H и T_x .

$$\mu = 1 - \frac{Q_x}{Q_H} = 1 - \frac{T_H}{T_x} \frac{\ln \frac{V_3}{V_4}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_x}{T_H}$$

$$Q_H = A_{1,2} = \nu T_H R \ln \frac{V_2}{V_1}$$



Идеальная тепловая машина (по циклу Карно): $\mu_k = \frac{T_H - T_x}{T_H}$