

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И.  
Ульянова (Ленина)»

кафедра физики

Конспект лекций по физике 2 семестр

Выполнили:  
Федоров М.  
Фабриков М.  
Есипова С.  
Группа № 7395

Преподаватель: Ходьков Д.А.

## Электричество и магнетизм.

Электрический заряд является неотъемлемой свойством некоторых так называемых *элементарных частиц*. Заряд всех элементарных частиц (электрон, протон, нейтрон), если он не равен нулю, одинаков по абсолютной величине. Его можно назвать элементарным зарядом ( $e$ ).

Поскольку всякий заряд ( $q$ ) образует совокупность элементарных зарядов, он является целым кратным  $e$ :

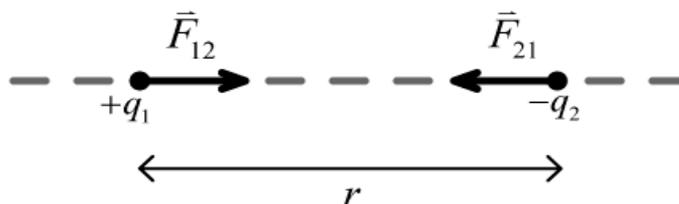
$$Q = \pm N \cdot e, \text{ где } N \text{ целое число.}$$

Наличие у тел электрического заряда проявляется в том, что такое тело взаимодействует с другими заряженными телами. Тела, несущие заряд *одинакового знака* (заряженные одноименно) *отталкиваются друг от друга*. Тела, заряженные разноименно – притягиваются.

Закон Кулона для точечных зарядов.

*Точечный заряд* – называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

В результате своих опытов Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.



Закон Кулона может быть выражен следующей формулой:

$$\vec{F}_K = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Закон всемирного тяготения (для сравнения):

$$\vec{F}_K = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

## Характеристика электрического поля – напряженность и потенциал.

Взаимодействие между зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем *электрическое поле*. Заряд, помещенный в такое поле, оказывается под действием силы. Следовательно, чтобы проверить наличие электрического поля в некоторой точке – нужно поместить туда *некоторый пробный точечный заряд*. По величине силы, действующей на данный заряд, можно судить об *интенсивности* поля.

На пробный заряд  $q_{\text{пр.}}$ , помещённый в электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $q$ , (где положение  $q_{\text{пр.}}$  относительно  $q$  определяется радиус-вектором  $r$ ) действует сила:

$$f = q_{\text{пр.}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r} \right).$$

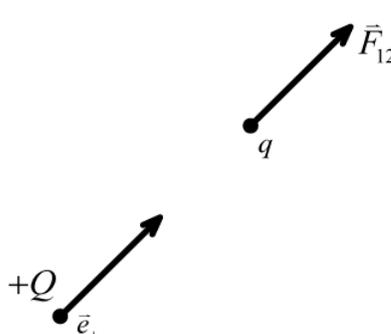
Очевидно, что отношение  $\frac{f}{q_{\text{пр.}}}$  для всех пробных зарядов будет одно и то же и зависит лишь от величин  $q$  и  $r$ , определяющих поле в данной точке. Поэтому это отношение можно принять за отношение, характеризующей электрическое поле. Эту векторную величину называют **напряженностью электрического поля** в данной точке:

$$E = \frac{f}{q_{\text{пр.}}}$$

Подставим  $f$ :

$$E = \frac{f}{q_{\text{пр.}}}$$

Рассмотрим напряженность в некоторой точке поля:



$|\bar{e}_r| = 1$

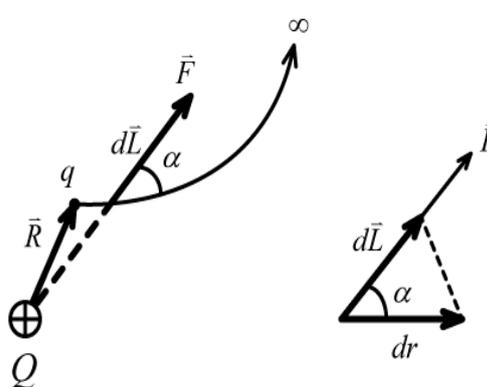
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q * Q}{r^2} * \bar{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q * Q}{r^2} * \bar{e}_r \quad \left[ \frac{H}{M} \right]$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 * 10^9 \left[ \frac{H * M^2}{Кл} \right]$$

Напряженность – это *силовая характеристика* поля.

**Потенциал:**



$$A_{r,\infty} = ?$$

$$dA = \vec{F} * d\vec{L} = \vec{F} * dL * \cos \alpha = F * dr$$

$$A_{r,\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \int_R^\infty \frac{q * Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q * Q}{R}$$

Потенциал в точке - это работа (A) силы поля по перемещению точки (*энергетическая характеристика*):

$$\varphi = \frac{A_{r,\infty}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q * Q}{R} \quad [B]$$

$$\varphi(1) - \varphi(2) = A_{1-2}$$

## Характеристики поля:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \\ \vec{E}_z \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = -\nabla * W$$

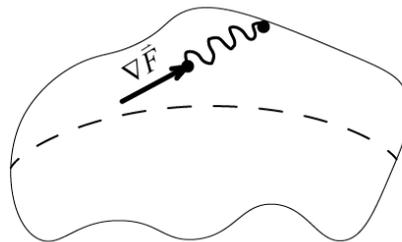
$$\nabla \equiv grad \equiv \vec{i} * \frac{d}{dx} + \vec{j} * \frac{d}{dy} + \vec{k} * \frac{d}{dz}$$

Градиент ( $\nabla$ ) показывает направление наибольшего возрастания функции.

$$\nabla_f = \vec{i} * \frac{df}{dx} + \vec{j} * \frac{df}{dy} + \vec{k} * \frac{df}{dz}$$

Отсюда:

$$q * \vec{E} = -\nabla * \varphi * q \quad \vec{E} = -\nabla * \varphi$$



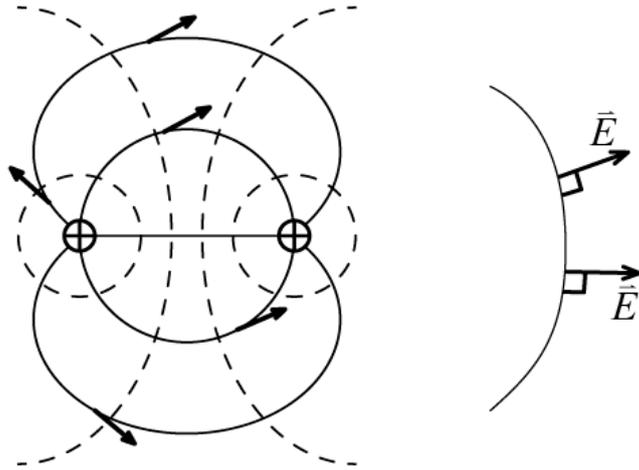
## Электрическое поле – это векторное поле.

Электрическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора  $E$ , совокупность этих векторов образуют поле вектора напряженности электрического поля. Линии  $E$  точечного заряда, очевидно, представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен. Линии одним концом упираются на заряд, а другим уходят в бесконечность.

Вектор линии поля:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

Вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к уравнению вектора линий.



Эквипотенциальные поверхности – это поверхности, где  $\varphi = const$ . Вектор  $\vec{E}$  всегда ортогонален эквипотенциальным поверхностям.

Принцип суперпозиций для электрического поля

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Если заряды расположены непрерывно, то надо поделить поле на бесконечно малые кусочки.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

## Поле бесконечно заряженной нити

Пусть есть нить с плотностью  $\lambda$ . Нить бесконечная.

Найдем  $\vec{E}$  в каждой части нити

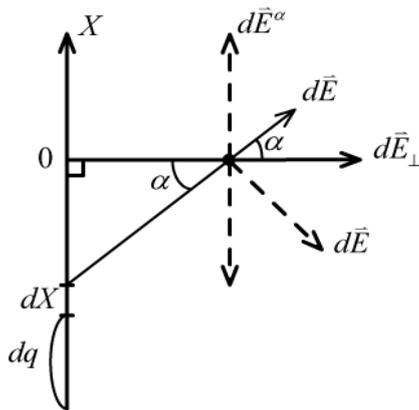
$$dE_{\perp} = dE * \cos \alpha$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{dq}{r^2} * \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\lambda * r * d\alpha}{\cos \alpha * r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\lambda * d\alpha}{a} * \cos \alpha$$

$$dx = \frac{r * d\alpha}{\cos \alpha}$$

$$dq = \lambda * dx$$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}$$



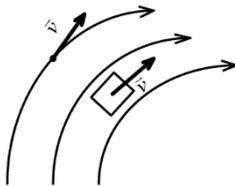
Таким образом, напряженность в точке можно найти по формуле:

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dE_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

## Теорема Гаусса для электростатического поля

Некоторые свойства векторных и скалярных полей.

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$  – векторное поле, заданное в каждой точке пространства. Оно характеризуется с помощью векторных линий.



$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

Аналогично с течением воды. (□ – проволока)

## Поток вектора.

Пусть течение жидкости охарактеризовано полем вектора скорости.  $V$  жидкости, протекающий за единицу времени ( $\Delta t$ ), через воображаемую поверхность  $S$ , называется потоком жидкости через эту поверхность. Чтобы найти поток вектора ( $\Phi$ ), разобьем поверхность на элементарные участки величины  $\Delta S$ . Из рисунка выше видно, что за время  $\Delta t$  через участок  $\Delta S$  пройдет объем жидкости равный:

Обозначим  $\cos \alpha$  как  $\alpha$  (между  $\perp$  и проволокой)

$$\Delta V = \Delta S * \cos \alpha * v * \Delta t$$

Разделим  $V$  на ( $\Delta t$ ) – найдем поток  $\Phi$

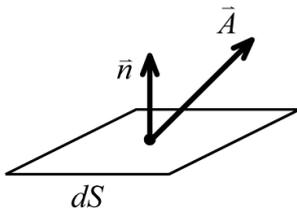
$$\Delta \Phi = \Delta V / \Delta t = \Delta S * \cos \alpha * v$$

Перейдя к дифференциалам получим:

$$d\Phi = \cos \alpha * v * dS$$

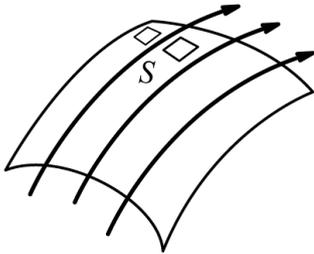
Формулу для потока вектора так же можно записать еще двумя способами:

- 1) Если учесть, что  $\cos \alpha * v$  дает проекцию вектора скорости на нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке  $dS$ , можно представить в виде  $d\Phi = \mathbf{V}_n dS$
- 2) Можно внести вектор  $d\vec{S}$ , модуль которого равен величине площадки  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали к площадке  $\mathbf{n}$  -  $d\vec{S} = dS * \mathbf{n}$



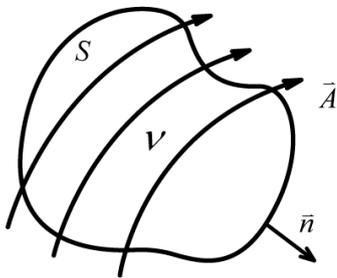
Таким образом мы можем записать формулу потока для произвольного вектора  $\vec{A}$  как:

$$d\Phi_A = \vec{A} * d\vec{S}$$



Если поверхность большая, то все то же самое:

$$\Phi_A = \int_S d\Phi = \int_S \vec{A} * d\vec{S}$$



Если поверхность замкнутая (частный случай):

$\Phi_A$  через замкнутую поверхность = 0

$\vec{n}$  всегда наружу

$$\Phi_A = \oint_S \vec{A} * d\vec{S}$$

## Дивергенция векторного поля

Возьмем в окрестностях точки P воображаемую замкнутую поверхность S. Если в ее объеме (V) не возникает и не вытекает жидкость, то поток, вытекающий наружу, будет равен нулю  $\Phi_v = 0$ .

Если  $\Phi_v \neq 0 \Rightarrow$  в V присутствуют источники (+) $\Phi_v$  или стоки (-) $\Phi_v$ .

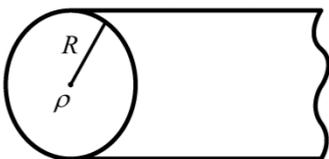
Отношение  $\Phi_v/V$  дает среднюю мощность источников в объеме V. В пределе, при стремлении V к нулю, отношение  $\Phi_v/V$  даст удельную мощность источников в точке P, которую называют *дивергенцией* (или *расхождением*) вектора A:

$$div \vec{A} \equiv \nabla \vec{A} - \text{это } \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{V} * \oint \vec{A} * d\vec{S}$$

Физический смысл дивергенции – это число векторных линий.

Дивергенция вектора  $\vec{A}$  в точке P(x, y, z) имеет вид:

$$div \vec{A} = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz}$$



Дивергенция электрического поля связана с эл. зарядом:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ где } \rho - \text{объем. плотность заряда в данной точке}$$

$\text{div} \vec{E} \neq 0$  там, где есть заряды.

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{М}^3} \right]$$

## Теорема Остроградского-Гаусса

Зная дивергенцию вектора  $\vec{A}$  в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров.

Поток произвольного векторного поля через произвольную векторную поверхность равен:

$$\oint_S \vec{A} * d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} * dV \quad (-\text{для } 3d)$$

Это соотношение носит название *теоремы Остроградского-Гаусса*.

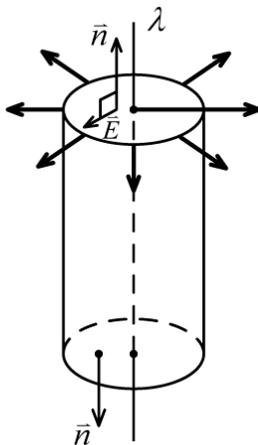
Для электрического поля:

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho * dV$$

Теорема Гаусса: поток  $\vec{E}$  электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме элементарных зарядов, находящихся *внутри* данной поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ :

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

У электрического поля могут быть источники (там оканчиваются или начинаются векторные линии) Источники – на зарядах.



Применим теорему Гаусса к бесконечной нити:

Выберем воображаемую поверхность (нить сравнима с цилиндром)

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} * dS$$

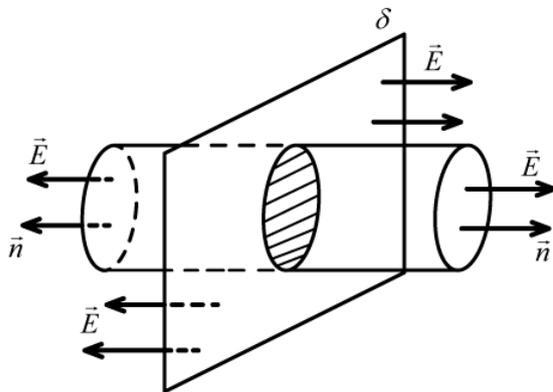
$$1) \oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \int_{S_E} \vec{E} * d\vec{S} = \int_{S_E} E * dS = E(a) * \int_{S_E} dS = E(a) * \frac{2\pi * a * h}{1}$$

$$2) Q = \lambda * h$$

$$3) E(a) * 2\pi * a * h = \frac{\lambda * h}{\epsilon_0}$$

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi * \epsilon_0 * a}$$

Поле бесконечно заряженной плоскости:



$$\delta = \frac{d}{dS}$$

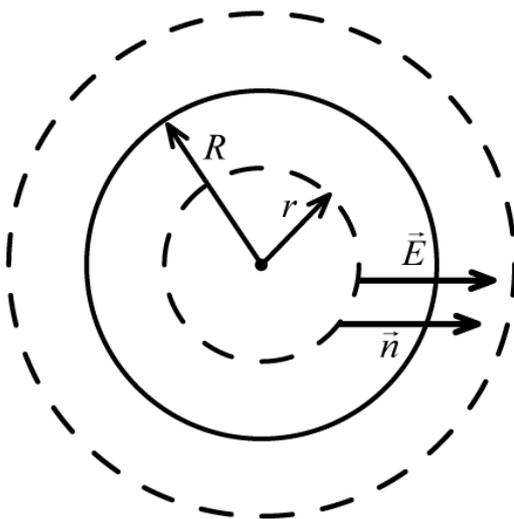
$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$1) \oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \int_{S_{очн.}} E * dS = E(a) * S_{очн.} * 2$$

$$2) Q = \delta * S_{очн.}$$

$$E = \frac{\delta}{2 * \epsilon_0}$$

Поле равномерно заряженного шара



Рассмотрим 2 случая:

$$1) r \leq R$$

Т. Гаусса к сфере

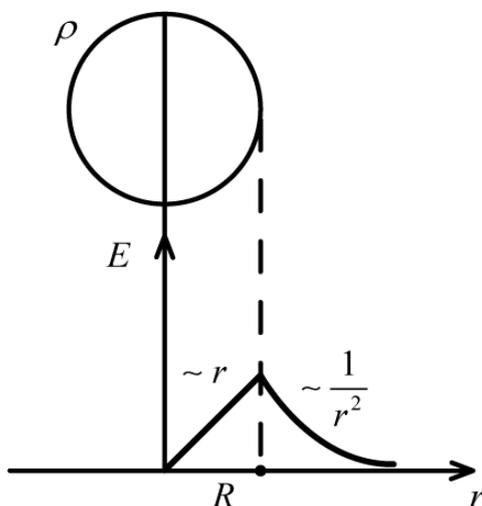
$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) * 4\pi * r^2 = \frac{4\pi * r^3 * \rho}{3 * \epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3 * \epsilon_0} * r$$

Поле внутри шара прямо пропорционально r

$$2) r > R$$



$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) * 4\pi * r^2 = \frac{4\pi * R^3 * \rho}{3 * \epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{R^3 * \rho}{3 * \epsilon_0} * \frac{1}{r^2}$$

Найдем график для потенциала:

$$\vec{E} = -\nabla * \varphi$$

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\varphi = \frac{A_{r,\infty}}{dr}$$

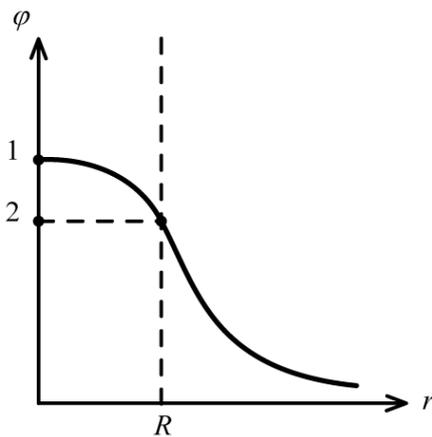
1) Для  $R > r$

$$\varphi = \int_r^\infty E_r * dr = -\frac{R^3 * \rho}{6 * \epsilon_0} * \frac{1}{r} \Big|_r^\infty = \frac{R^3 * \rho}{6 * \epsilon_0} * \frac{1}{r}$$

2) Для  $r \leq R$

$$\varphi = \int_r \frac{\rho}{3 * \epsilon_0} * r * dr + \frac{R^3 * \rho}{3 * \epsilon_0} * \frac{1}{R} = \frac{\rho}{6 * \epsilon_0} (R^2 - r^2) + \frac{R^3 * \rho}{3 * \epsilon_0}$$

Тогда график:



$$(1) \frac{R^2 * \rho}{2 * \epsilon_0}$$

$$(2) \frac{R^2 * \rho}{3 * \epsilon_0}$$

$\varphi$  убывает как  $\frac{1}{r}$ :

$$\varphi \sim \frac{1}{r}$$

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r} \rightarrow \infty$$

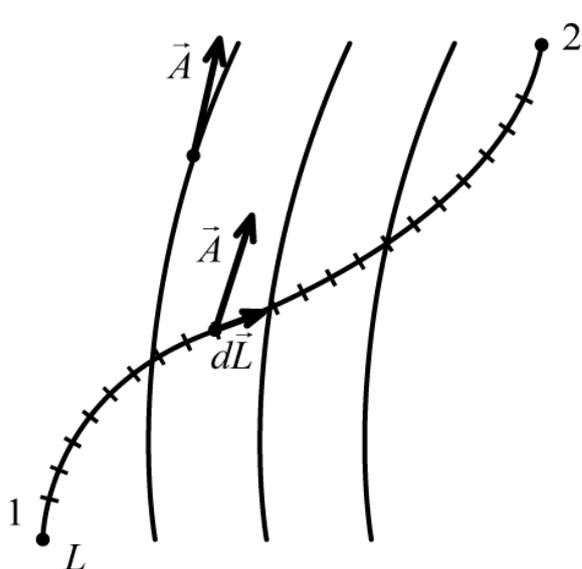
## Циркуляция электростатического поля

Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию с постоянным сечением - контур L. В зависимости от характера движения жидкость в контуре будет неподвижной или будет двигаться вдоль контура (циркулировать). В качестве меры этого движения возьмем произведение скорости жидкости на длину искомого контура L. Эту величину назвали *циркуляцией* вектора  $v$  по контуру L.

Таким образом циркуляция вектора любого  $\vec{A}$  по произвольному замкнутому контуру L определяется как:

$$L = \oint_L \vec{A} * d\vec{l}, \text{ где } d\vec{l} \text{ элементарный отрезок канала}$$

Если разбить произвольную незамкнутую поверхность L на большое число элементарных поверхностей  $\Delta l$ , то циркуляция по контуру может быть представлена как сумма элементарных циркуляций  $\Delta C$  по контурам, ограничивающим  $\Delta l$ :



$$dC = \vec{A} * d\vec{l} = A * dl * \cos \alpha$$

$$\int_L \vec{A} * d\vec{l} = C$$

Исходя из физического смысла циркуляции (это работа по перемещению заряда q под действием силы Кулона из одной точки эквипотенциальной поверхности в другую) ее можно записать как:

$$A_{\text{работа}} = \int_{L \rightarrow r} \vec{F} * d\vec{l}$$

Так как силы, действующие на заряд в q в электростатическом поле, являются

консервативными. Следовательно, работа этих сил на любом замкнутом пути  $\Gamma = 0$ :

$$C = \oint_L \vec{A} * d\vec{l} = 0$$

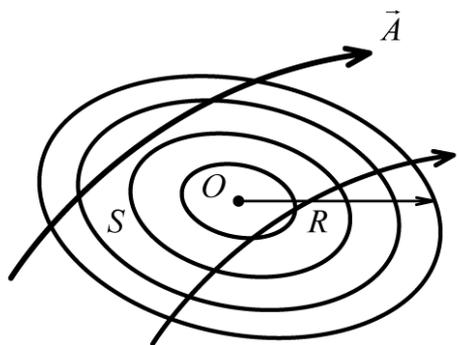
$$\oint_L \vec{E} * d\vec{l} = 0$$

## Ротор. Теорема Стокса.

Итак, возьмем воображаемый контур L, лежащий в плоскости, проходящий O, и рассмотрим выражение

$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S}$ , где  $C_a$  – циркуляция вектора  $\vec{A}$  по контуру L, радиусом R, а S - площадь охватываемая контуром. Таким образом, эта величина ведет себя как проекция некоторого вектора на

направление нормали к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Максимальное значение предела определяет модуль этого вектора, а направление положительной нормали  $\vec{n}$ , при которой достигается максимум, дает направление вектора. Этот вектор называется *ротором* (или вихрем)  $\vec{A}$ . Обозначается как  $rot a$ :



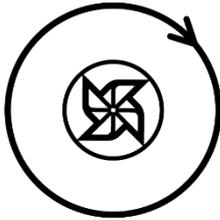
$$(rot a) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{C_a}{S} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \vec{A} * d\vec{l}$$

**Теорема Стокса:** циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному контуру L равна потоку вектора  $rot \vec{A}$  через произвольную поверхность S, ограниченную данным контуром:

$$\oint_L \vec{A} * d\vec{l} = \int_S (rot \vec{A}) * d\vec{S}$$

Когда  $rot \vec{A} \neq 0$ ? Пример – вертушка, на которую дует ветер.

$rot \vec{A} = 0$ , если:

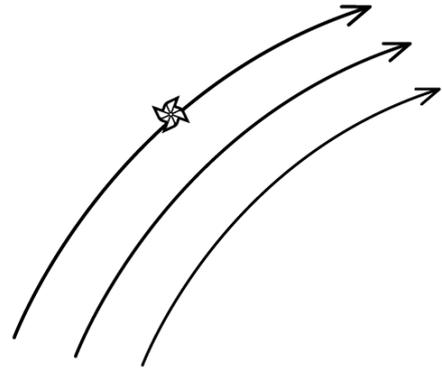


Ротор – источник вихря, замкнутых линий

$$div \vec{A} = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz}$$

$$rot \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left( \frac{dA_z}{dy} - \frac{dA_y}{dz} \right) + \vec{j} \left( \frac{dA_x}{dz} - \frac{dA_z}{dx} \right) + \vec{k} \left( \frac{dA_y}{dx} - \frac{dA_x}{dy} \right)$$



Ротор электростатического поля – ноль, так циркуляция замкнутой поверхности = 0:

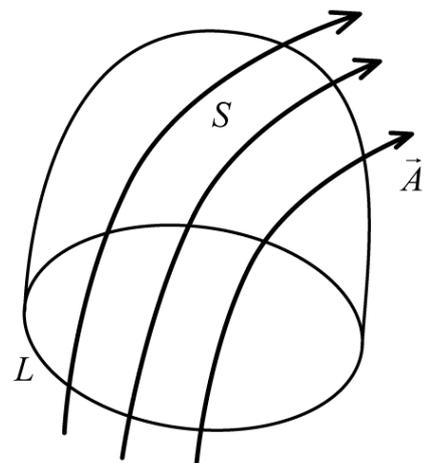
$$rot \vec{E} = 0$$

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$rot \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 0$$

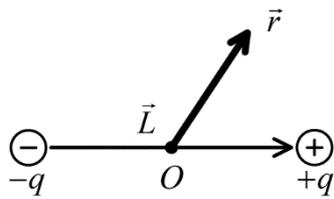


Поверхность натянута на контур – край совпадает с L :

## Электрический диполь.

Электрический диполь – это система из 2 одинаковых по величине, но разных по знаку зарядов фиксированным расстоянием L.

Поле диполя:



$\vec{L}$  – от "минуса" к "плюсу"

$$|\vec{r}| \gg |\vec{L}|$$

Потенциал в точке, определяемой радиус-вектором  $r$  равен:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi_-(P) + \varphi_+(P) = \frac{q}{4 * \pi * \epsilon_0} * \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &= \frac{q}{4 * \pi * \epsilon_0} * \frac{|(\vec{r}_- - \vec{r}_+)|}{r_+ * r_-} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_- - \vec{r}_+ = \vec{l}$$

$$r_+ * r_- \approx r^2$$

$$\varphi(P) = \frac{q * l}{4 * \pi * \epsilon_0 * r^2}$$

Близко действенная система:

$\vec{p}_e$  – Электрический дипольный момент

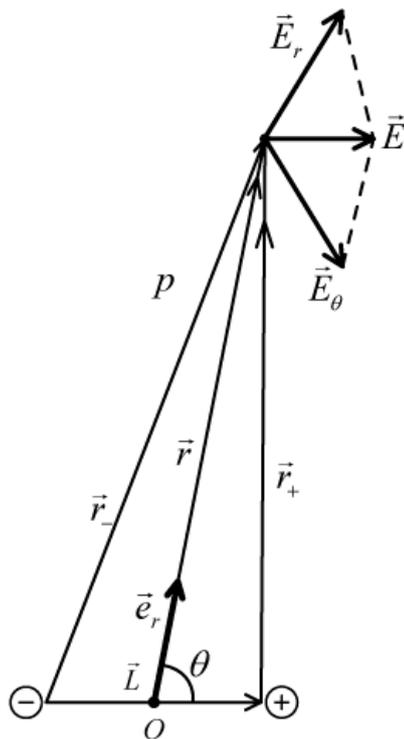
$$\vec{p}_e = q * \vec{l}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} * \frac{\vec{p}}{r^2} * \vec{e}_r, \text{ где } \vec{e}_r$$

– ед. базис вектор

$$\varphi(r) = \frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} * \frac{p * \cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = -grad \varphi = -\nabla \varphi$$



Тогда:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}; \quad E_\theta = -\frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$\frac{1}{r} - \text{коэф Ламе}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{p * \cos \theta}{r^3}$$

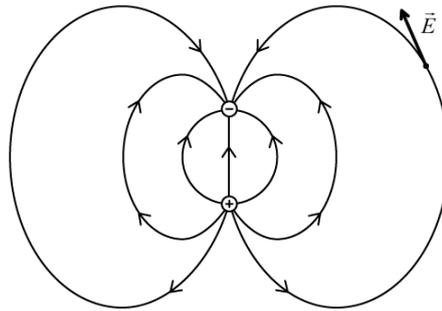
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{p * \sin \theta}{r^3}$$

Тогда:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 * r^3} * \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

$E$  обратно пропорциональна  $r^3$ !

Рисунок для диполя:

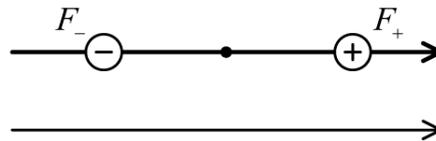


## Электрический диполь во внешнем электрическом поле

Механический момент:

$$\vec{\mu} = [\vec{p}, \vec{E}]$$

$$\mu = F * l * \sin\alpha = q * E * l * \sin\alpha = p * E * \sin\alpha$$



Момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $p$  установился по направлению поля. Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле:

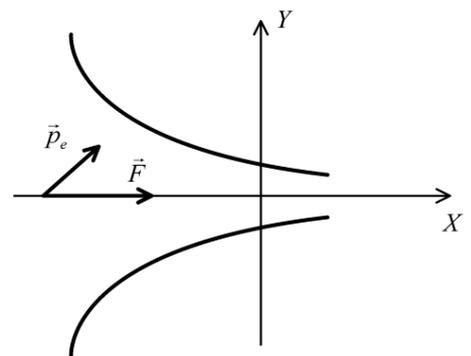
$$dW = dA = \mu d\alpha = p_e * E * \sin\alpha * d\alpha$$

$$W = -(\vec{p}, \vec{E})$$

Если поле однородно, то сила, действующая на диполь, равна нулю. На диполь в неоднородном поле кроме момента действует еще и сила, стремящаяся переместить его в направлении оси  $x$ :

$$\vec{F} = -\nabla * W$$

$$\vec{F} = \nabla * (\vec{p}, \vec{E})$$



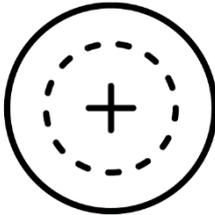
## Электрический диполь во внешнем электрическом поле

Вещества:

- 1) Проводники: металлы (Есть свободные электроны)
- 2) Диэлектрики (Нет свободных электронов)
- 3) Полупроводники

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенны изменения. Всякая молекула представляет собой систему с суммарным зарядом равным.

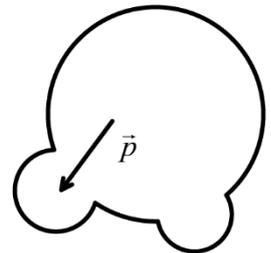
Рассмотрим молекулу:



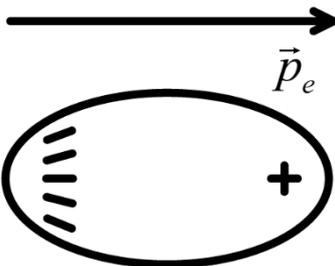
$$\vec{p}_e = 0$$

У симметричных молекул центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом и называется *неполярными*.

У не симметричных молекул ц.т. разносных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольными моментом м называются *полярными*.



$$\vec{p} \neq 0$$



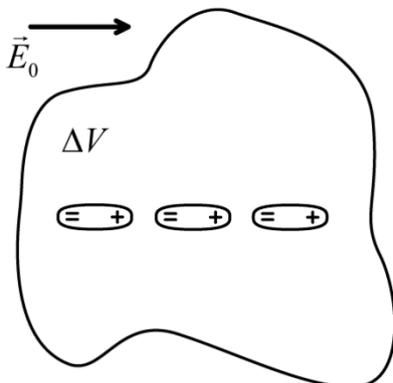
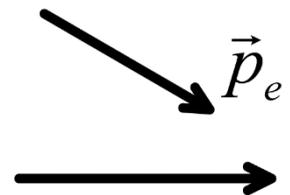
Под действием внешнего электрического поля заряды устанавливаются: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. (Атом- маленький диполь)

В результате этого молекула преобладает дипольный момент, величина которого пропорциональна напряженности поля.

$$\beta: \vec{p} = \epsilon_0 * \beta * \vec{E}^0,$$

Где  $\beta$  – величина наз. *поляризуемостью молекулы*.

Внешний момент стремится повернуть молекулу так, что бы ее дипольный момент установился по направлению поля:



Возьмем объем  $\Delta V$ , в котором много неполярных молекул: Есть  $\vec{E}_0 \Rightarrow$  каждый атом становится диполем. Это называется поляризацией (физическое явление, заключенное в превращении каждого атома диэлектрика в диполь под действием поля).

Макроскопические параметры, характеризующие поляризацию, нужны, что бы понять, что происходит.

Введем  $\vec{P}$  – поляризуемость диэлектрика( вектор поляризации).

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} * \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 * \alpha * \vec{E},$$

Где  $\alpha$  - степень поляризации (безразмерная величина)

Тензор, если вещество анизотропное (направления P и E не совпадают):

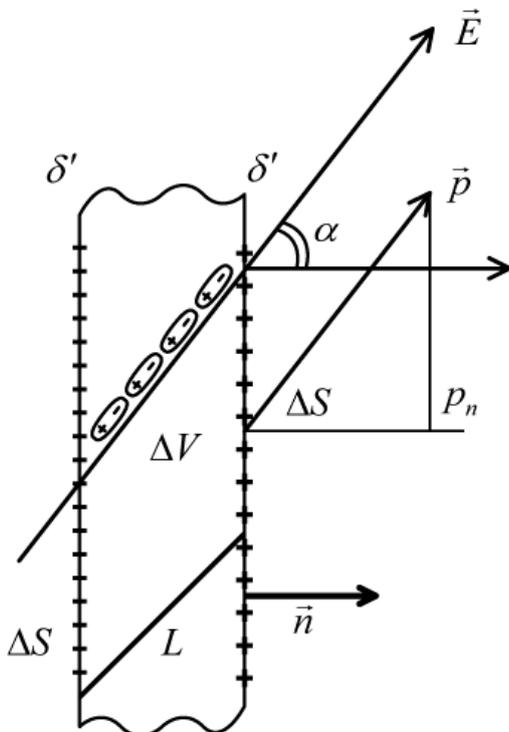
$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Изотроп: свойства среды одинаковы в разных направлениях.

Анизотроп: свойства среды различны.

## Поле внутри диэлектрика

Возьмем плоскопараллельную пластину. Посчитаем поляризацию  $\Delta V$ :



$$P * \Delta S * l * \cos \alpha = \sigma' * \Delta S * l$$

Где  $\Delta S * l * \cos \alpha$  - объем кривого цилиндра.

Поверхностная плотность заряда:

$\sigma'$  (связанные). Так же бывают

свободные ( $\vec{e}$  заряженные шарик)

Связанные возникают под действие

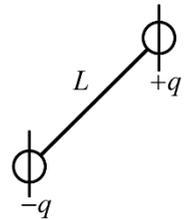
поляризации, не могут перемещаться.

Отсюда:

$$\sigma' = P * \cos \alpha = P_n, n - \text{нормальная составляющая}$$

$$\sigma' = \vec{P}_0 * \vec{n}$$

$$\sigma' = \epsilon_0 * \alpha * E_n$$



Объемные заряды:

Найдем объемную плотность заряда

$$dq = en(l^- + l^+) \Delta S * \cos \alpha = P * \Delta S * \cos \alpha = \vec{P} * d\vec{S},$$

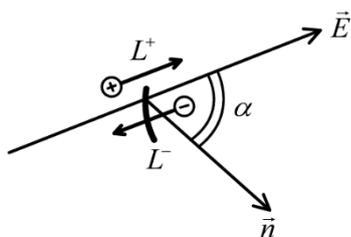
где  $\Delta S$  - воображаемая малая

площадка,

$(l^- + l^+)$  - расстояние  $l$  на которое

смещаются друг от друга + и -

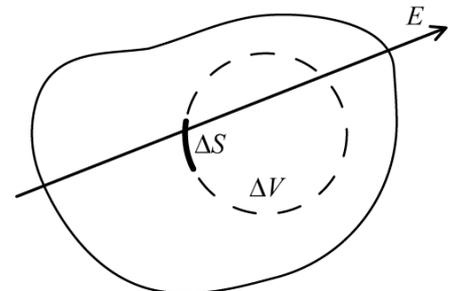
связанные заряды в диэл.



В результате этого смещения каждая

пара приобретает дипольный момент,

число таких пар в ед. объема =  $n$ , следовательно произведение дает

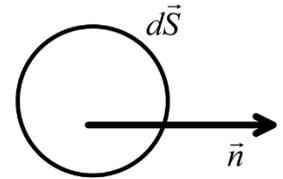


модуль поляризованности  $P$ . Таким образом, заряд проходящий через площадку  $\Delta S$  в направлении нормали к ней :

$$p = e * l = e * (l^- + l^+) = e * l * n = P * n * dS$$

Таким образом, вышедший заряд:

$$dq_{\text{выш.}} = \vec{P} * d\vec{S}$$



Избыточный заряд. Возьмем внутри диэлектрика замкнутый контур  $S$ . При включении поля эту поверхность пересечет и выйдет наружу связанный заряд  $q'$ . В результате в объеме, ограниченной поверхностью  $S$ , возникает избыточный заряд:

$$dq_{\text{изб.}} = -dq_{\text{выш.}} = -\vec{P} * d\vec{S}$$

$$\Phi_{\text{изб.}} = \oint_S \vec{P} * d\vec{S}$$

$$\Phi_{\text{изб.}} = \int_V p' * dV, \quad \text{где } p' \text{ — об. пл. связ. заряда}$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{P} * d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{P} * dV$$

Отсюда:

$$\int_V p' * dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} * dV$$

$$p' = -\nabla \cdot \vec{P} \quad p' = -\epsilon_0 * \nabla(\epsilon * \vec{E})$$

$\nabla$ - плотность источника векторных линий (дивергенция)

Когда объемная плотность связанных зарядов отлична от нуля?

$$\nabla E' = \frac{1}{\epsilon_0} * (\rho + \rho')$$

$$\rho' = -\epsilon_0 * \nabla * \epsilon * \vec{E} - \epsilon_0 * \epsilon * \nabla * \vec{E} = -\epsilon_0 * \nabla \epsilon \vec{E} - \epsilon p - \epsilon p'$$

$$\rho' = -\frac{1}{1 + \epsilon} * (\epsilon_0 * \nabla * \epsilon * \vec{E} + \epsilon p)$$

Вывод:  $\rho' \neq 0$ , когда внутри диэлектрика есть свободные заряды и когда диэлектрик неоднородный.

$$\nabla \epsilon = \vec{i} \frac{d\epsilon}{dx} + \vec{j} \frac{d\epsilon}{dy} + \vec{k} \frac{d\epsilon}{dz}$$

Связанные заряды отличаются от сторонних лишь тем, что не могут покинуть пределы молекул, в состав которых они входят. В остальные же их свойства таковы, как и у всех прочих зарядов. В

частности, они служат источником электрического поля. Поэтому в случае, когда плотности плотность связанных зарядов  $\rho' \neq 0$  отлично от нуля, формулу можно записать в виде:

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} * (\rho + \rho'), \nabla - \text{градиент}$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} * (\rho - \nabla \rho'), \nabla - \text{дивергенция}$$

$$\rho = \nabla(\epsilon_0 * \vec{E} + \nabla \rho')$$

Рассмотрим выражение:

$$\epsilon_0 * \vec{E} + \nabla \rho' = \epsilon_0 * \vec{E} + \epsilon_0 * \kappa * \vec{E} = \epsilon_0 * (1 + \kappa) * \vec{E}$$

$1 + \kappa = \epsilon$  – относительна диэлектрическая проницаемость

Отсюда:

$$\epsilon_0 * (1 + \kappa) * \vec{E} = \epsilon_0 * \epsilon * \vec{E}$$

$$\nabla(\epsilon_0 * \epsilon * \vec{E}) = \rho$$

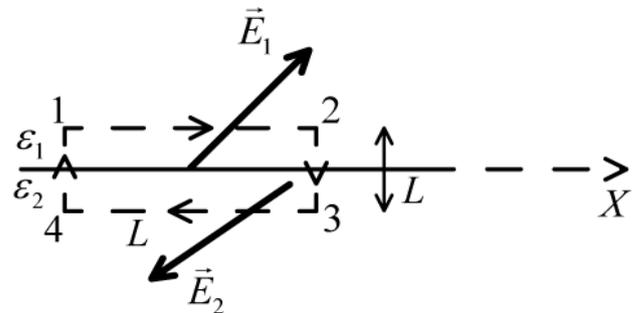
$$\nabla \vec{D} = \epsilon_0 * \epsilon * \vec{E} - \text{вектор эл. индукции}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho, \text{ где}$$

Источник  $\vec{D}$  – своб. заряды связи

По теореме Гаусса для вектора  $\vec{D}$ : поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.

$$\Phi_D = \oint \vec{D} * d\vec{S} = q_{св}$$



Найдем циркуляцию  $\vec{E}$  вдоль контура:

$$\oint_L \vec{E} * d\vec{L} = \int_{1 \rightarrow 2} + \int_{2 \rightarrow 3} + \int_{3 \rightarrow 4} + \int_{4 \rightarrow 1} = 0$$

, где интегралы должны обратится в ноль.

$$\lim_{l \rightarrow 0} \rightarrow \int_{1 \rightarrow 2} E^{(1)}_x dx + \int_{3 \rightarrow 4} E^{(2)}_x dx$$

$$E^{(1)}_\tau = E^{(2)}_\tau, \text{ где } E^{(1)}_\tau - \text{тангенсальная составляющая}$$

Они непрерывны на границе раздела 2-х сред. При переходе в диэлектрик с меньшей  $\epsilon$  угол, образуемый линиями смещения с нормальной, уменьшается, следовательно, линии располагаются реже; при переходе в диэлектрик с большей  $\epsilon$  линии смещения, напротив,

сгущаются.

На границах диэлектриков линии терпят скачок, прямо пропорциональный  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

Граничные условия для тангенциальной составляющих:

$$\frac{\mathcal{D}^{(1)}_{\tau}}{\mathcal{D}^{(2)}_{\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Возьмем ту же границу раздела двух сред. На границе раздела отсутствуют заряды:

$$q_{св} = 0$$

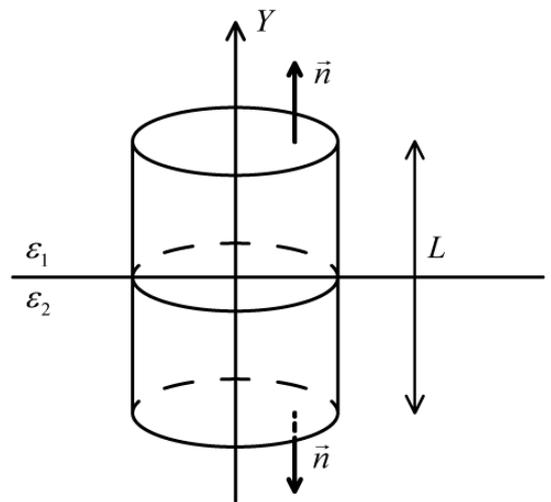
$$0 = \oint \vec{D} * d\vec{S} = \int_{S_{бок}} + \int_{S_{осн}} = \int_{S_{бок}} \mathcal{D}^{(1)}_n * dS + \int_{S_{осн}} \mathcal{D}^{(2)}_n * dS$$

$\lim_{l \rightarrow 0}$  :

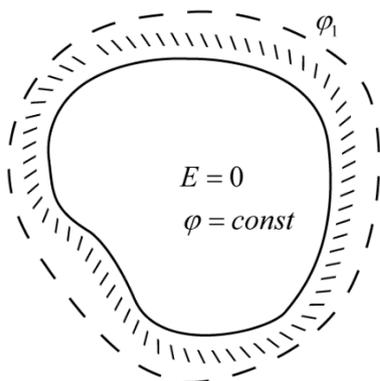
Граничные условия для нормальной составляющей:

$\mathcal{D}^{(1)}_n = \mathcal{D}^{(2)}_n$  – непрерывно

$\frac{\mathcal{D}^{(1)}_{\tau}}{\mathcal{D}^{(2)}_{\tau}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  – терпят разрыв



## Проводники в электрическом поле



Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равно нулю  $E=0$ .

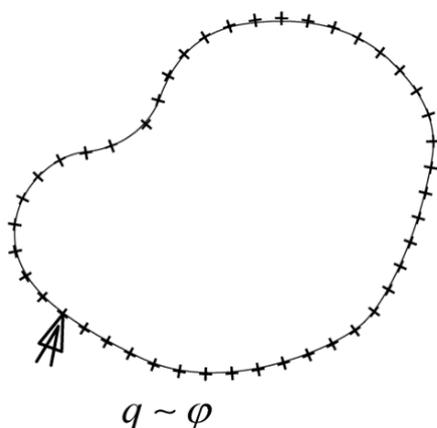
В соответствии с  $E=-\text{grad } \varphi$  потенциал внутри проводника постоянный ( $\varphi = \text{const}$ )

Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности  $E=E_n$ . В случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

## Емкость проводника

Сообщенный проводнику заряд  $q$  распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю.

Будем помещать заряды на проводник. Эти заряды будут перераспределены по поверхности проводника (неравномерно; равномерно – только на шаре)



Плотность заряда выше вблизи острых кромок и рёбер (зависит от кривизны)

$q \uparrow \Rightarrow \varphi \uparrow$  (прямо пропорционально)

$\varphi$  - работа силы электрического поля по перемещению единичного положительного заряда с поверхности проводника в бесконечно удаленную точку

$$\varphi = \frac{A_{\varphi \rightarrow \infty}}{q} \text{ коэффициент пропорциональности}$$

$$q = C * \varphi - \text{емкость}$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между потенциалом и зарядом называется емкостью проводника. Емкость численно равна заряду, сообщенному проводнику, который повышает его потенциал на единицу.

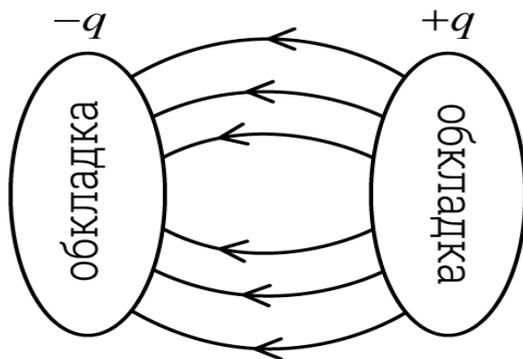
Вычислим потенциал заряженного шара радиуса  $R$ , проинтегрировав выражение  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  по  $r$  от  $R$  до  $\infty$ :  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

Сопоставляя  $C = \frac{q}{\varphi}$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  находим, что емкость единичного шара радиуса  $R$  равна  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ .

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 в при сообщении ему заряда в 1 к. Эта единица емкости называется *фарадой* ( $\varphi$ ).

## Конденсатор

Емкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды.



Конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали воздействия на емкость конденсатора, обкладкам придают специальную форму и располагают их друг относительно друга так, чтобы поле было полностью сосредоточено внутри конденсатора.

Под емкостью конденсатора понимается физическая величина, пропорциональная заряду  $q$  и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$q = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$q = C \cdot U$$

Емкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенного проводника.

Емкость плоского конденсатора. Если площадь обкладки  $S$ , а заряд на ней  $Q$ , то напряженность поля между обкладками равна:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S}$$

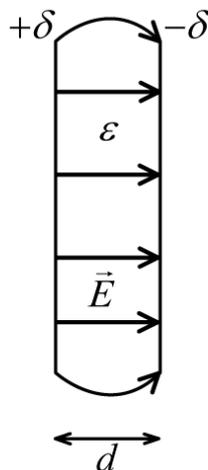
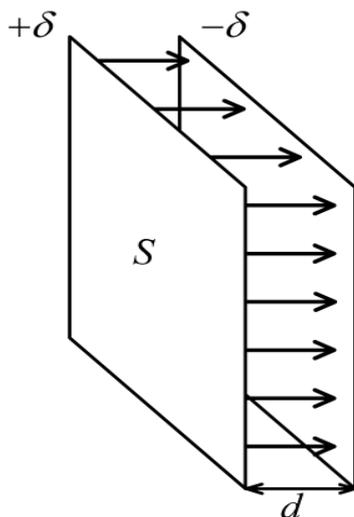
Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon \epsilon_0 S},$$

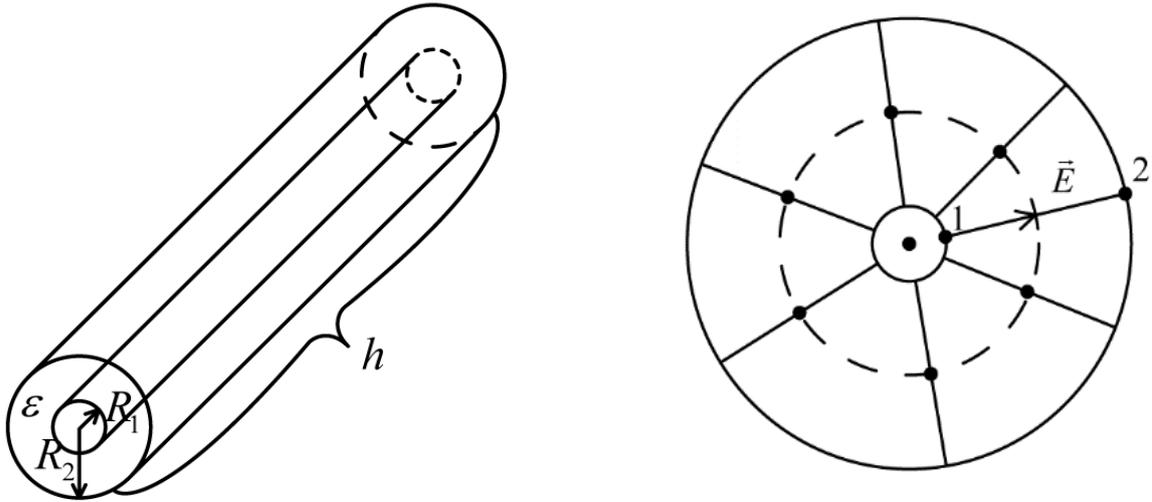
откуда для емкости плоского конденсатора получается следующая

$$\text{формула: } C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d},$$

где  $S$  – площадь обкладки,  $d$  – величина зазора между обкладками,  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.



Емкость цилиндрического и сферического конденсаторов.



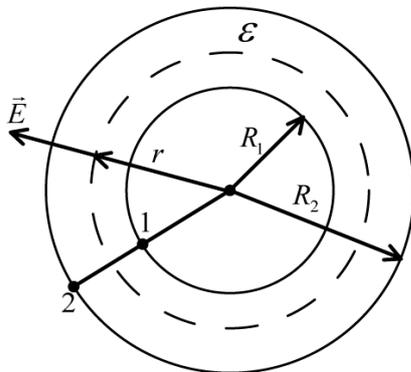
Заменив в формуле  $E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$   $\lambda$  через  $q/l$  ( $l$  – длина обкладок) и учтя возможность наличия диэлектрика, для напряженности поля между обкладками цилиндрического конденсатора получим следующее выражение:  $E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{lr}$

Разность потенциалов между обкладками находим путем интегрирования:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

( $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок). Разделив  $q$  на найденное значение  $\varphi_1 - \varphi_2$ , получим емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

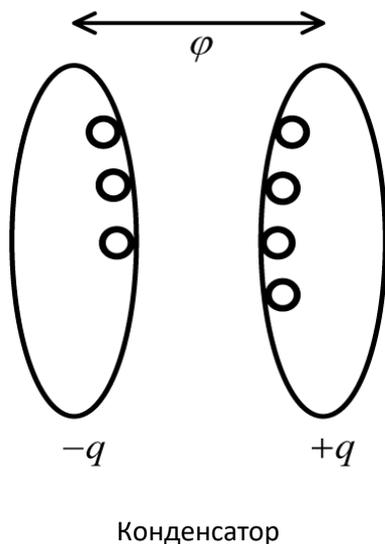
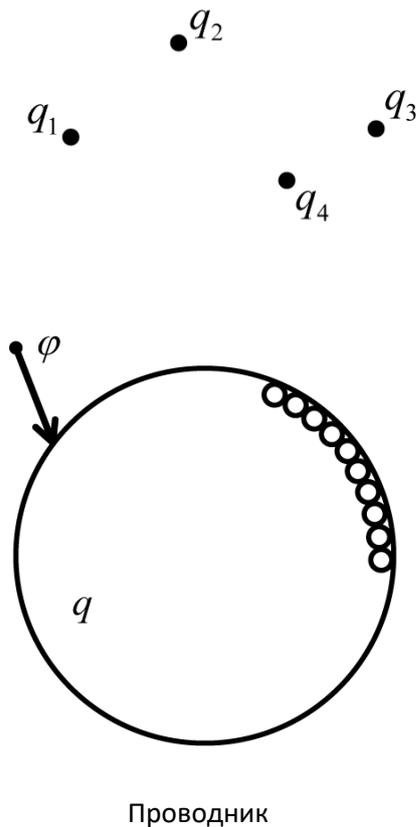


Напряженность поля между обкладками сферического конденсатора равна  $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$  (как и в предыдущих случаях, учтена возможность наличия диэлектрика в зазоре между обкладками). Найдем разность потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

( $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок). Отсюда для емкости получается выражение  $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

## Энергия заряженного проводника. Точечная система зарядов.



В случае  $N$  зарядов потенциальная энергия системы равна  $W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$ , где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в той точке, где находится  $q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го

Заряд  $q$ , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов  $\Delta q$ . Такая система обладает энергией, равной работе, которую нужно совершить, чтобы перенести все заряды  $\Delta q$  из бесконечности и расположить на поверхности проводника.

$\Delta A = \varphi \Delta q = \frac{q}{C} \Delta q$ , где  $\varphi$  – потенциал проводника, обусловленный уже имеющимся на нем зарядом  $q$ ,  $C$  – емкость проводника. Работа идет на увеличение энергии проводника. Поэтому, переходя к дифференциалам, имеем  $dW = \frac{1}{C} q dq$ , откуда получается выражение для энергии:  $W = \frac{q^2}{2C} + const$

Учтя соотношение между емкостью, зарядом и потенциалом проводника, можно написать

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Энергия заряженного конденсатора

Работа переноса очередной порции равна

$\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U$ , где  $U$  – напряжение на конденсаторе. Заменяя  $U$  и переходя к дифференциалам, получим  $dW = dA = U dq = \frac{q}{C} dq$

Интегрируя последнее выражение, приходим к формуле для энергии заряженного конденсатора

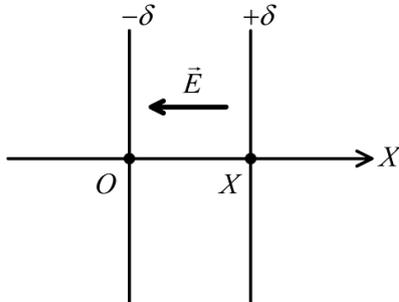
$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Тот же результат для энергии конденсатора можно получить с помощью формулы  $W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$ .

Мысленно делим заряд  $+q$ , находящийся в точке с потенциалом  $\varphi_1$ ,  $-q$ , - с потенциалом  $\varphi_2$   
Энергия системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} [(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU$$

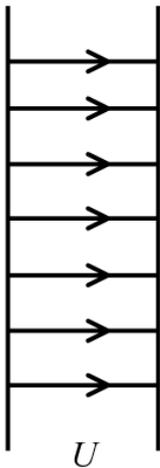
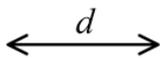
С помощью выражения для энергии можно найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга



$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S} x$ . Теперь воспользуемся соотношением, связывающим потенциальную энергию и силу, причем будем считать заряд на обкладках постоянным

$$f = - \frac{dW}{dx} = - \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S}$$

Энергия поля плоского конденсатора.



Подставим в  $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$  выражение  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$  для емкости, тогда

$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 S d$ . Согласно  $\frac{U}{d} = E$ ; произведение  $Sd$  представляет собой объем  $V$ , занимаемый полем. Таким образом, можно записать  $W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V$ . Согласно этой формуле, плотность энергии поля

плоского конденсатора  $\omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ . Эта формула справедлива и для неоднородного поля, ее можно записать в виде  $\omega = \frac{ED}{2}$ , или  $\omega = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}$ . В изотропном диэлектрике направления векторов  $E$  и  $D$  совпадают, поэтому можно записать так:  $\omega = \frac{ED}{2}$ . Заменив в этой формуле  $D$  его значением,

получим для  $\omega = \frac{E(\epsilon_0 E + P)}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2}$ . Первое слагаемое в этом

выражении совпадает с плотностью энергии поля  $E$  в вакууме. Второе слагаемое представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика. В расчете на единицу объема диэлектрика работа, затрачиваемая на смещение зарядов  $q_k$  на величины  $dr_k$  равна

$$dA = \sum_{V=1} q_k E dr_k = E d(\sum_{V=1} q_k r_k) \text{ (поле } E \text{ однородно).}$$

Согласно формуле  $\sum_{V=1} q_k r_k$  равно дипольному моменту единицы объема, который по определению есть вектор поляризации диэлектрика  $P$ . Следовательно,

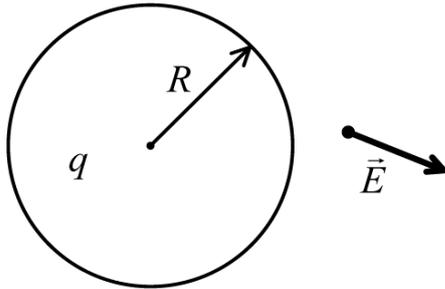
$$dA = E dP.$$

В соответствии с формулой  $P = \chi\epsilon_0 E$ , откуда  $dP = \chi\epsilon_0 dE$ . Подставив это значение  $dP$ , получим для  $dA$  выражение:

$$dE = d\left(\frac{\chi \epsilon_0 E^2}{2}\right) = d\left(\frac{EP}{2}\right).$$

Произведя интегрирование, найдем для работы, затрачиваемой на поляризацию единицы объема диэлектрика, выражение

$$A = \frac{EP}{2}$$



Энергия поля заряженного шара радиуса R, помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в этом случае является функцией только от r:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем слоя равен  $dV = 4\pi r^2 dr$ . В нем заключена энергия

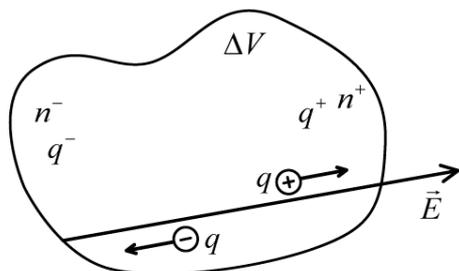
$$\begin{aligned} dW &= \omega dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

Энергия поля

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

## Постоянный электрический ток

Упорядоченное движение зарядов называется электрическим током. Его принято характеризовать силой тока – скалярной физической величиной, равной заряду, переносимому носителями через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Сила тока:  $i = \frac{dq}{dt}$ . Единица силы тока – ампер (А)

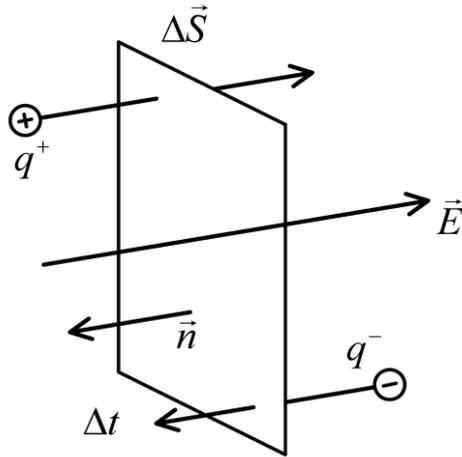


Проводящая среда – среда, содержащая проводящие заряды, которые могут перемещаться под действием поля. Например, жидкости с ионами, газы, металлы

$$\vec{V} = V_{\text{хаот}} + \vec{u}$$

$$\langle V \rangle = \langle V_x \rangle + \langle u \rangle$$

Выберем внутри области площадку:



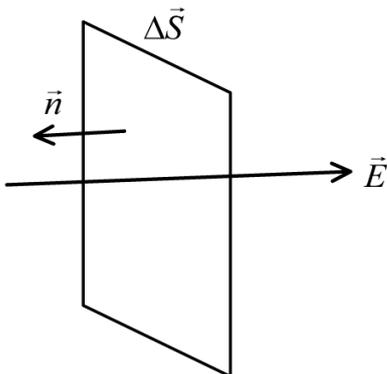
$$q = |q^+| + |q^-|$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta |q^+|}{\Delta t} + \frac{\Delta |q^-|}{\Delta t}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \vec{F}^+ = \vec{E}^0 * q^+$$

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет неравномерно. Более детально электрический ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока  $j: j = \frac{di}{dS_i}$ .

Возьмем ту же площадку:



Если площадка  $\perp$  направлению движения:

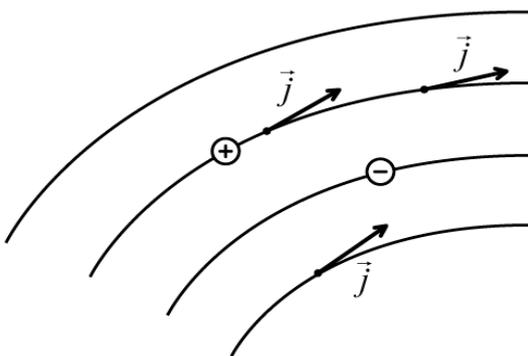
$$i = \frac{I}{\Delta S}$$

Если площадка маленькая:

Поток через площадку – сила тока:

$$I = \vec{j} * \vec{dS} = |q^+| * \vec{u}^+ + n^+ + |q^-| * \vec{u}^- + n^-$$

Заряды перемещаются по траектории. Эти траектории определяют вектор поля



За направление вектора  $j$  принимают направление. Вектора скорости и упорядоченного движения положительных носителей.

Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой

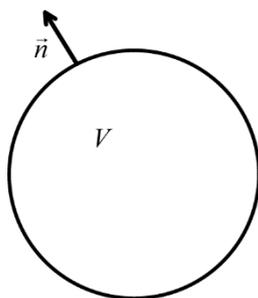
$j = p_+ * u_+ + p_- * u_-$ , где  $p_+$  и  $p_-$  - объемные плотности положительного и отрицательного зарядов-носителей;  $u_+$  и  $u_-$  - скорости их упорядоченного движения.

В проводниках, где носителями являются только электроны ( $p_- < 0$  и  $u_+ = 0$ ), плотность тока  $j = p_- * u_-$ .

Зная вектор плотности тока в каждой точке проводника, можно найти силу тока  $i$  через любую поверхность  $S$ :  $i = \int_S j_n dS$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным  $I = \frac{q}{t}$ , где  $q$  – заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечное время  $t$ .

### Уравнение непрерывности.



Выберем замкнутую область пространства с носителями:

$$\oint_S \vec{j} * d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}$$

Это соотношение называют уравнением непрерывности

Для постоянного тока  $\oint j dS = 0$ , т.е. поле вектора  $j$  не имеет источников

$$\oint j dS = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Дивергенция вектора  $j$  в некоторой точке равна убыли плотности заряда в единицу времени в той же точке:

$$\nabla * j = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Отсюда вытекает условие стационарности:

$$\nabla * j = 0$$

Оно означает, что в случае постоянного тока поле вектора  $j$  не имеет источников

Градиент:

$$\nabla = \vec{i} * \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} * \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} * \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \varphi = \vec{i} * \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} * \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} * \frac{\partial \varphi}{\partial z} = grad \varphi$$

Дивергенция:

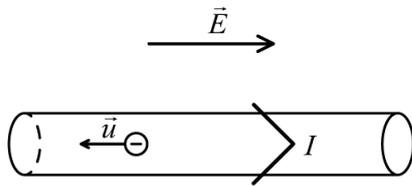
$$\nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div \vec{A}$$

Источником векторных линий  $\vec{j}$  являются те точки, в которых меняется заряд.

# Электродвижущая сила

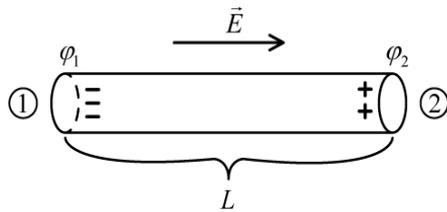
Рассмотрим ток в металлах:

Направление тока – направление положительно заряженных частиц.



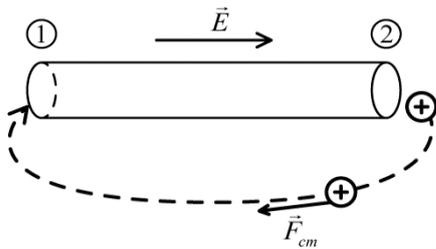
В металле нет положительных зарядов

Т.е. направление  $\vec{I}$  противоположно направлению движения  $\vec{e}$



$$E^0 * l = \Delta\varphi$$

Чтобы ток тёк:



Надо переместить положительный заряд с помощью сил неэлектрической природы (сторонних сил)

ЭДС ( $\mathcal{E}$ ) – величина, равная работе сторонних сил, отнесенной к единице положительного заряда

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}$$

Размерность э.д.с. совпадает с размерностью потенциала.

Стороннюю силу  $f_{ст}$ , действующую на заряд  $q$ , можно представить в виде

$$f_{ст} = E^* * q$$

Векторную величину  $E^*$  называют напряженностью поля сторонних сил. Работу сторонних сил над зарядом  $q$  на всем протяжении замкнутой цепи:

$$A = \oint f_{стl} dl = q \oint E_i^* dl$$

Разделив эту работу на  $q$ , получим э.д.с., действующую в цепи

$$\mathcal{E} = \oint E_i^* dl$$

Электродвижущая сила, действующая на участке 1-2 равна:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_i^* dl$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля  $f_E = qE$ .  
 Результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд  $q$  равна:

$$f = f_{ct} + f_E = q(E^* + E)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом  $q$  на участке цепи 1 – 2, дается выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 E_l^* dl + q \int_1^2 E_l dl = q \mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

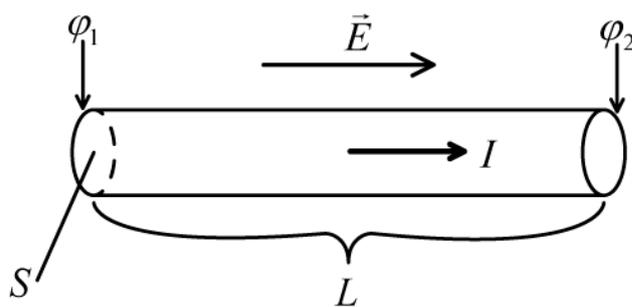
Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, так что  $A=q\mathcal{E}$ .

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением  $U$  на данном участке цепи.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

## Закон Ома

Возьмем цилиндрический участок провода



$$I \sim U$$

$R$  – электрическое сопротивление проводника;

$$I = \frac{1}{R} U$$

Единицей сопротивления служит ом. Для однородного цилиндрического проводника сопротивление равно:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$l$  – длина проводника,  $S$  – площадь его поперечного сечения,  $\rho$  – зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением вещества ([ом \* м])

Перейдем к дифференциальной форме закона Ома:

$$I = \frac{SU}{\rho l}$$

$$E = -\nabla\varphi \quad U = E * l$$

Отсюда:

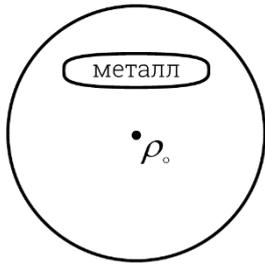
$$jS = \frac{SEl}{\rho l}$$

Дифференциальная форма закона Ома:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma E$$

Где  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  – коэффициент электропроводности или проводимость материала.

Почему внутри металлов нет зарядов? Это можно доказать:

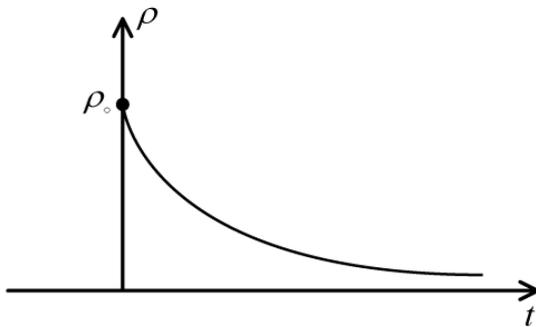


$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Подставим  $\vec{j}$ , считая  $\sigma = \text{const}$ :



$$\sigma * \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\sigma * \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dt$$

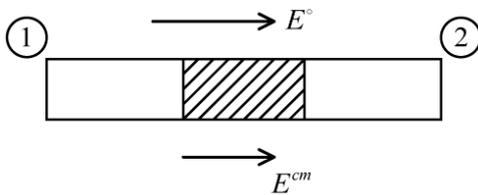
$$\ln \rho = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} * t * \ln \rho_0$$

В металле в результате флуктуации появилась объемная плотность заряда

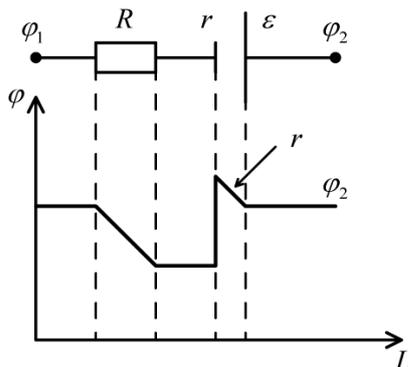
$$\rho(t) = \rho_0 * e^{\frac{-\sigma}{\epsilon_0} * t}$$

Заряды выталкиваются на поверхность (график зависимости выше)

## Закон Ома для неоднородного участка цепи



$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \epsilon_{12}$$

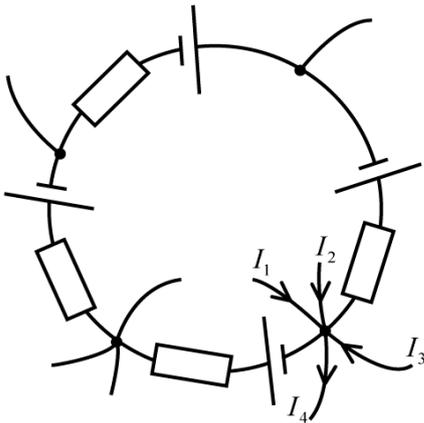


Откуда:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \epsilon_{12}}{R} - \text{интегральная форма}$$

$$j = \sigma(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*) - \text{дифференциальная форма}$$

## Законы Кирхгофа



Предположим, что существует сложная цепь:

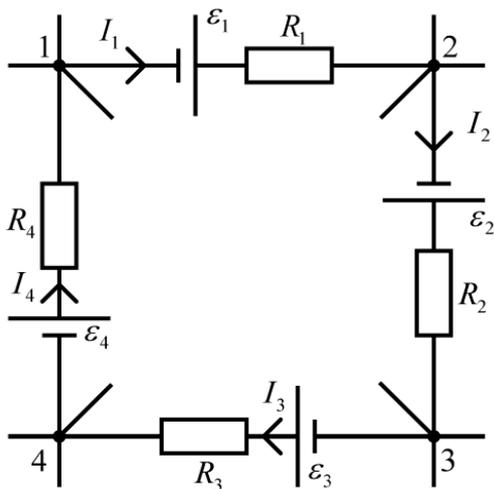
Ток втекает в узел +

Ток вытекает из узла –

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_k = 0$$

Второе правило Кирхгофа – алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре

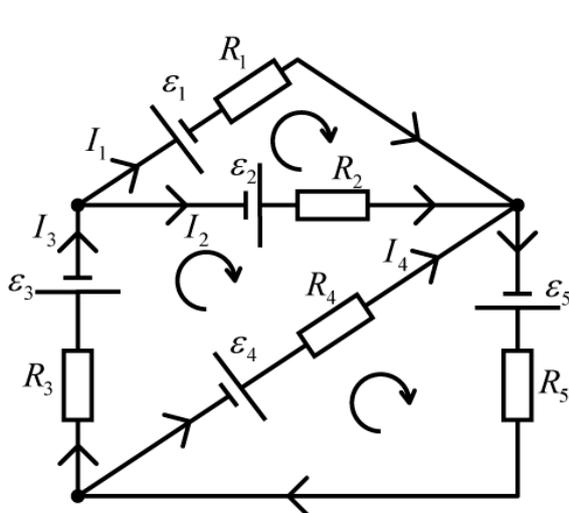


$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k$$

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 \\ I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 \\ I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3 \\ I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

Пример задачи:



$$\begin{cases} I_1 R_1 - I_2 R_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ I_4 R_4 + I_5 R_5 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \end{cases}$$

Запишем первый закон

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$

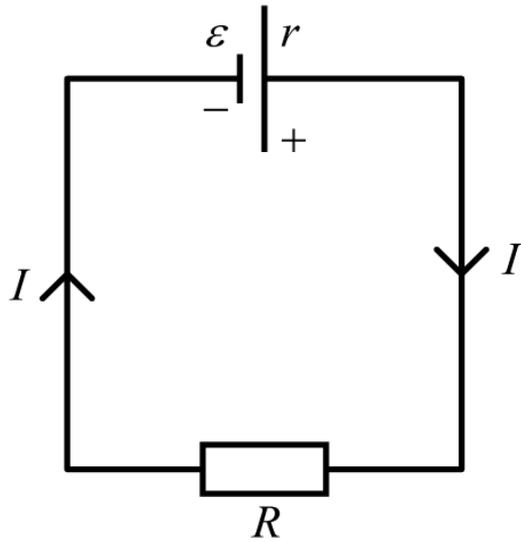
5 уравнений – 5 неизвестных. Запишем систему

$$\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 & R_1 & -R_2 \\ 0 & R_2 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|R| * (\vec{I}) = (\vec{\varepsilon})$$

$$\vec{I} = |R|^{-1} * \vec{\varepsilon}$$

Пример:



$\varepsilon, r$  – заводские характеристики

Закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Мощность:

$$P = I^2 * R = \frac{\varepsilon^2 * R}{(R + r)^2}$$

Полная мощность:

$$P_{\varepsilon} = I^2 * (R + r) = \frac{\varepsilon^2}{R + r}$$

КПД:

$$\eta = \frac{P_{\text{полез}}}{P_{\varepsilon}} = \frac{R}{R + r}$$

График мощности:

Полная мощность:

Полезная мощность:

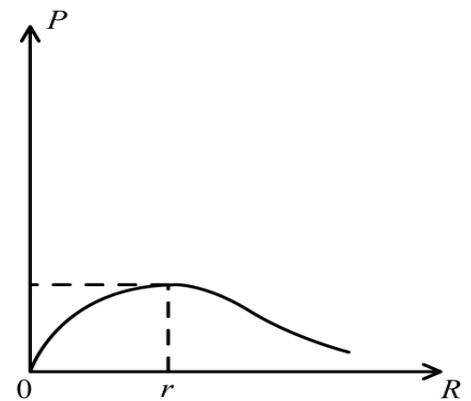
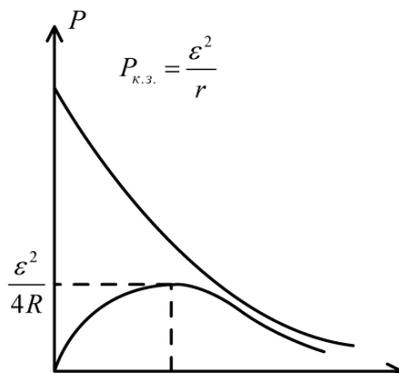


График КПД:

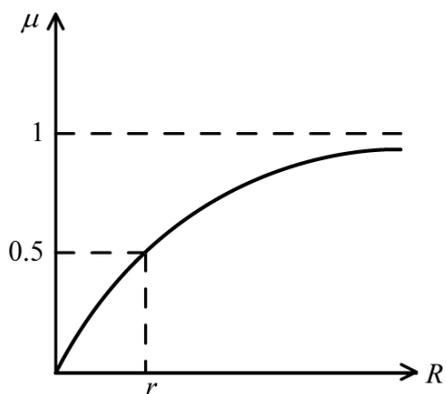
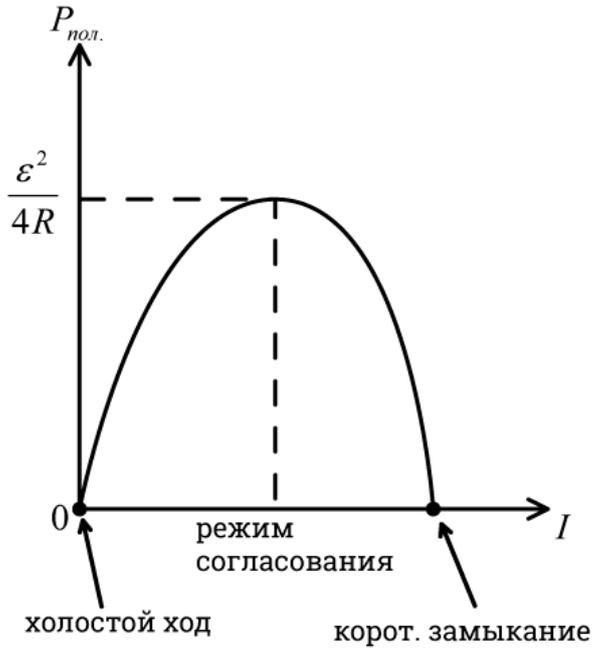


График зависимости  $P_{\text{пол.}}$  от  $I$ :

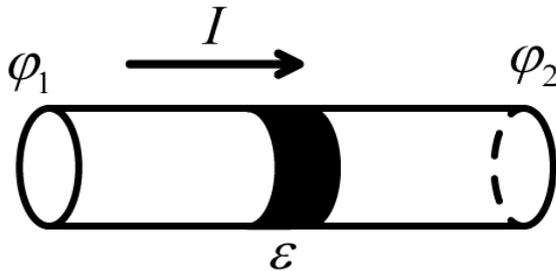


$$P_{\varepsilon} = \varepsilon I$$

$$P_{\text{пол.}} = \varepsilon I - I r^2$$

$R = \infty$  - режим холостого хода (цепь разомкнули)

Мощность, выделяемая в цепи. Мощность тока



$$P = UI$$

$$P_{\text{удел}} = \frac{dP}{dV}$$

$P = P' * N$ , где  $P'$  - мощность 1 носителя, а  $N$  -

Количество носителей

$$P' = \vec{F} * \vec{U} = e(\vec{E} + \vec{E}^x)\vec{U}$$

$$N = n * V$$

$$P = e * n * \vec{U}(\vec{E} + \vec{E}^x)\Delta V = j(\vec{E} + \vec{E}^x)\Delta V$$

$$P_{\text{удел}} = j(\vec{E} + \vec{E}^x) - \text{дифференциальная форма}$$

## Закон Джоуля - Ленца

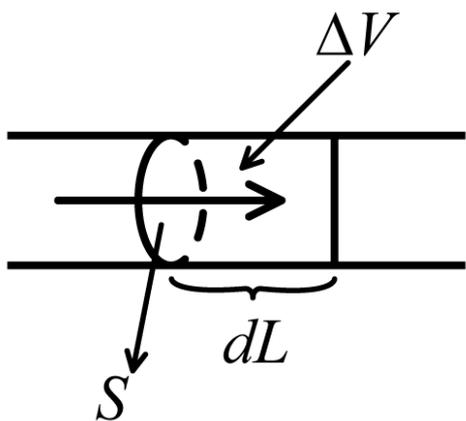
При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Количество выделяющегося в проводнике тепла пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени:

$$Q = RtI^2$$

Если сила тока изменяется со временем, то (Интегральная форма)

$$Q = \int_0^t Ri^2 dt$$

Найдем теплоту за бесконечно малый промежуток времени в проводе:



Ток течет + площадке, поэтому:

$$I = \vec{j}d\vec{S} = j dS = jS$$

$$R = \rho * \frac{dl}{S}$$

$$dQ = I^2(t)Rdt = j^2 * S^2 * \frac{\rho l}{S} dt = j^2 * \rho * S * l * dt \\ = \rho * \vec{j}^2 * \Delta V dt$$

$$Q_{\text{удел}} = \frac{dQ}{dV * dt}$$

Дифференциальная форма

$$Q_{\text{удел}} = \rho * \vec{j}^2$$

## Магнитное поле

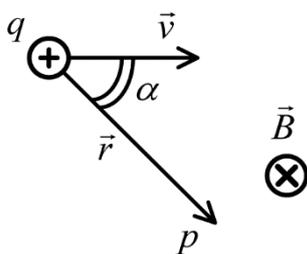
Взаимодействие токов возникает осуществляется через поле, называемое магнитным. Магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Принято обозначать  $B$  – магнитная индукция.

Магнитное поле не оказывает влияния на покоящийся заряд. Сила возникает тогда, когда заряд движется.

Движущиеся заряды(токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся заряды в нем действуют силы.

Поле  $B$  порождаемое несколькими токами, равно векторной сумме полей, порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$B = \sum B_i$$



В случае движения заряда со скоростью  $V$  в пространстве появляется выделенное направление (направление вектора скорости). Что бы возникло ускорение – необходимо действие на заряд какого-либо поля. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое в некоторой точке  $P$  точечным зарядом  $q$ .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$$

Единица магнитной индукции в СИ  $B = [\text{Тл}]$

Опыты Эрстеда (провода, по которой течет ток, натянутая над магнитной стрелкой):

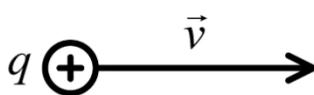
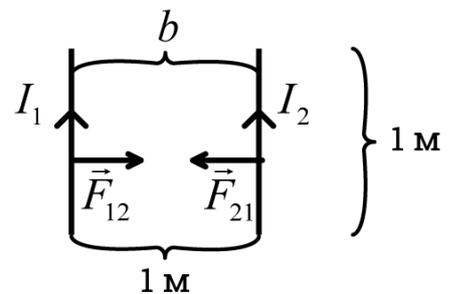
$$F_{12} = k * \frac{2 * I_1 * I_2}{b}$$

$$2 * 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2 * 1 * 1}{1}$$

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$$

$$F = 2 * 10^{-7} \text{ Н}$$

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \text{ Н * м}$$



Магнитное поле регистрируется с помощью магнитной стрелки.

Движущийся наблюдатель не регистрирует поле?



$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{q * r * \sin\alpha}{r^2}$$

Направление смотрится по правилу правой руки (векторное произведение).

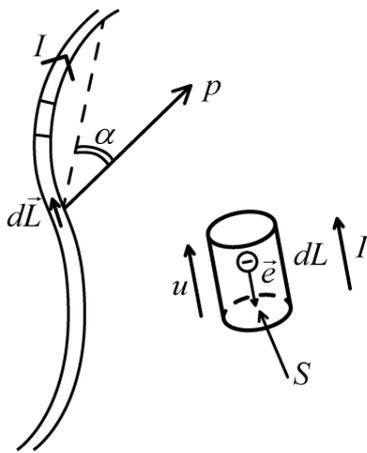
**Закон Био-Савара.**

На основании исследований Био и Савара магнитных полей, текущих по тонким проводам различной формы Лаплас сделал выводы, что магнитное поле любого тока может быть вычислено

как векторная сумма полей, создаваемых отдельными элементами участками токов.

Выясним характер магнитного поля, создаваемого произвольным тонким проводом, по которому течет ток.

Найдем поле малого участка  $d\vec{l}$ .



$$\vec{dl} \uparrow \uparrow \vec{I}$$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= N * d\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{e[\vec{u}, \vec{r}]}{r^2} * n * S * dl = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{e * u * r * S * [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^2} \end{aligned}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^2}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * dl * \sin \alpha}{r^2}$$

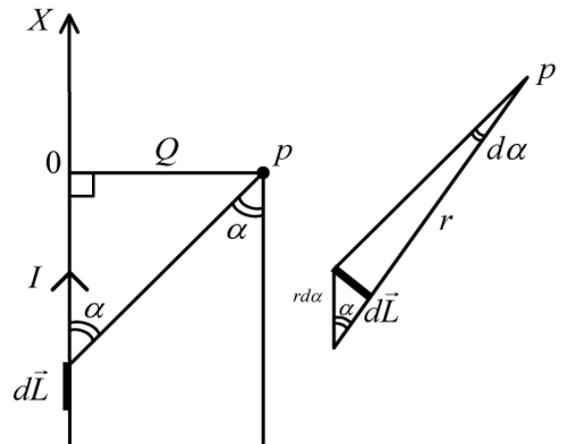
Найдем поле прямого провода:

$$dl = \frac{r * d\alpha}{\sin \alpha}$$

$$r = \frac{Q}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * dl * \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{r dr}{\sin \alpha * r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * \sin \alpha * d\alpha}{a} \end{aligned}$$

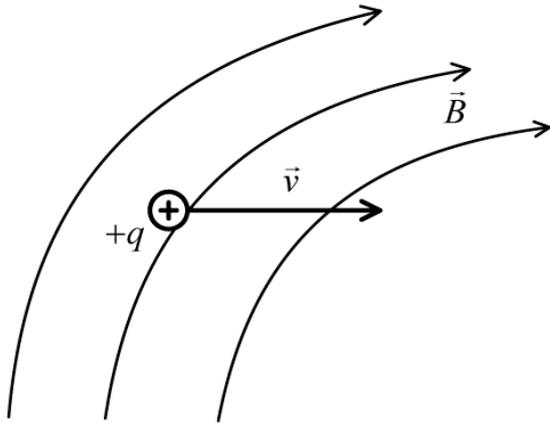
$$B = \int_0^\pi dB = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2I}{Q}$$



## Сила Лоренца

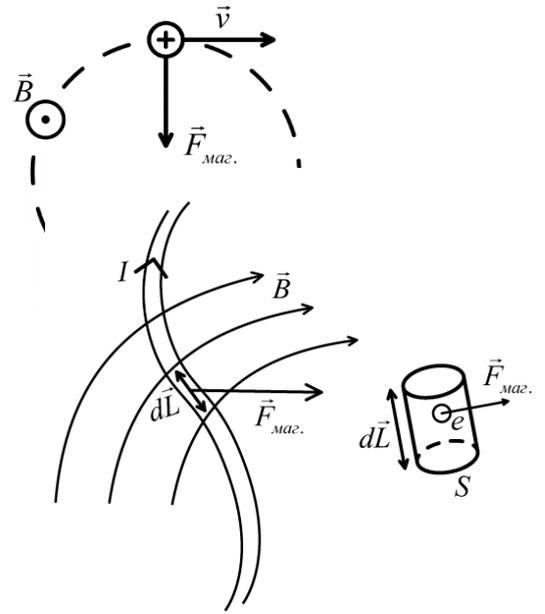
На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую мы будем называть *магнитной*. (направление определяется по правилу правой руки)

$$\vec{F}_{\text{маг}} = q * [\vec{V}, \vec{B}]$$



Если имеются одновременно электростатическое и магнитные поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{маг}} = q * \vec{E} + q * [\vec{V}, \vec{B}]$$



## Закон

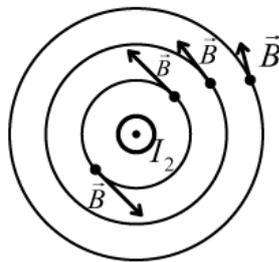
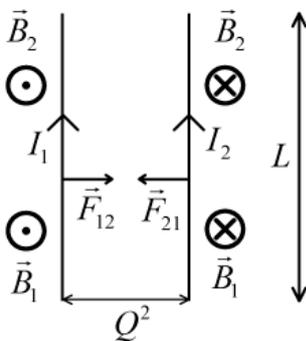
### Ампера

Если провод, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей тока действует сила:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{маг}} &= N * \vec{F}'_{\text{маг}} (\text{1 носитель}) = n * S * \vec{U} * e [\vec{dL}, \vec{r}] \\ &= n * \vec{U} * e * S * [\vec{dL}, \vec{B}] = I * [\vec{dL}, \vec{B}] \end{aligned}$$

Сила Ампера:

$$d\vec{F}_A = I * [\vec{dL}, \vec{B}]$$



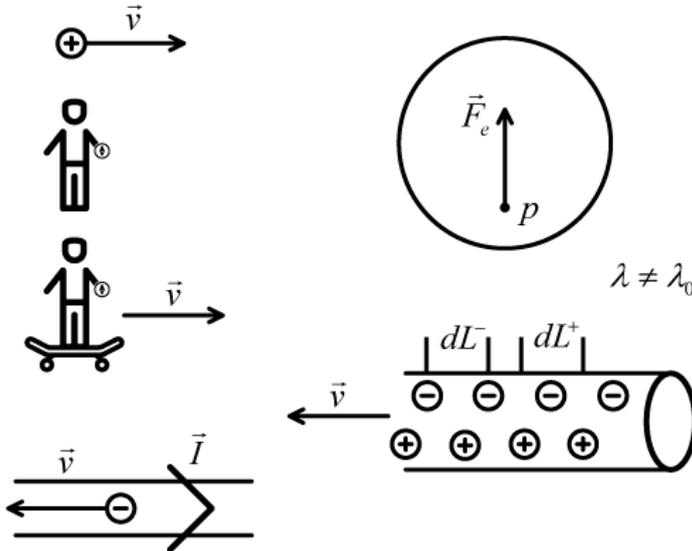
Докажем, что магнитное взаимодействие можно рассматривать как релятивистский эффект (докажем, что два параллельно направленных провода, по которым идет ток, взаимодействуют). Найдем направление силы.

$$\vec{F}_{12} = I_1 * \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I_2 * l}{Q^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I_1 * I_2 * l}{Q^2} = \vec{F}_{21}$$

## Относительность движения

Электрическое и магнитное поле неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле. При специальном выборе системы отсчета поле может оказаться чисто электрическим или чисто магнитным. Однако относительно других систем отсчета то же поле представляет собой совокупность электрического и магнитных полей.

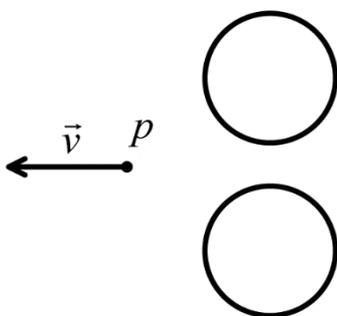
В разных инерциальных системах отсчета электрическое и магнитное поля одной и той же совокупности зарядов оказываются различными. Вывод, выходящий за рамки курса общей физики, приводит к следующим формулам преобразования полей при переходе от системы отсчета  $K$  к движущейся относительно нее  $K'$ :



$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

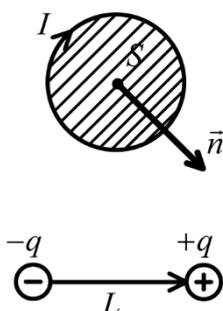
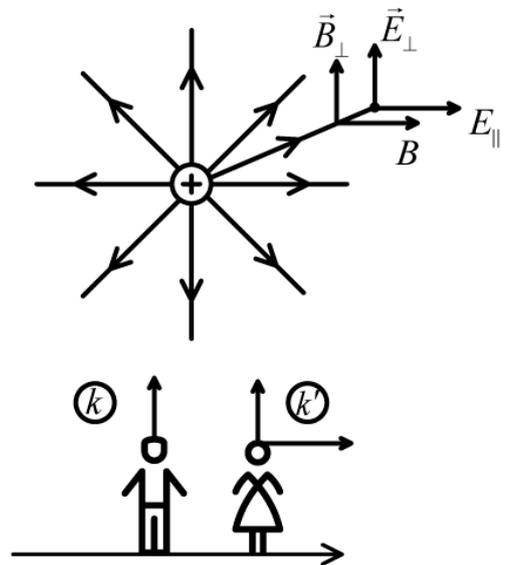
$$dl^- = dl_0^- * \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$dl^+ = dl_0^+ * \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$



$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} * [\vec{V}, \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$



### Контр с током в магнитном поле.

Рассмотрим плоский замкнутый контур в виде окружности. Магнитный дипольный момент:

$$\vec{p}_m = I * \vec{n} * S = I * \vec{S}$$

$$\vec{p}_e = q * \vec{l}, \text{ где } e - \text{эл.}$$

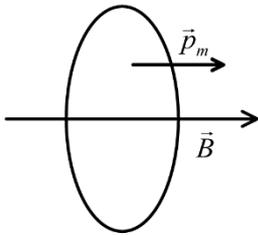
Поведение контура в магнитном поле:

$$d\vec{F}_1 = I * [\vec{dl}_1, \vec{B}]$$

$$d\vec{F}_2 = I * [\vec{dl}_2, \vec{B}]$$

$$|d\vec{N}| = x * d\vec{F} = I * B * x [dl] = I * B * dS \text{ (момент)}$$

$$\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

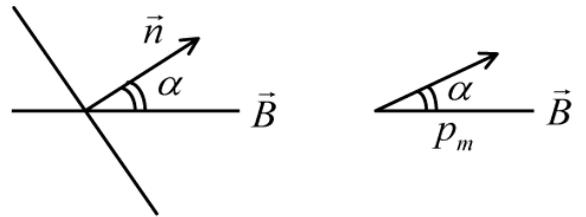
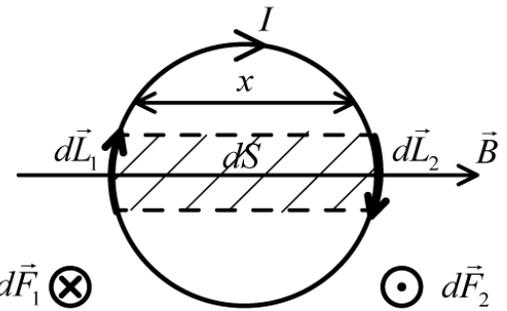


Положение, в которое момент пытается загнать рамку:

$$\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$$

Модуль вектора N:

$$N = p_m * B * \sin \alpha$$



Для того, что бы угол  $\alpha$  между векторами  $p_m$  и  $B$  увеличить на  $d\alpha$ , нужно совершить работу против сил, действующих на контур в магнитном поле  $dA$ . Проворачиваясь в первоначальное положение, контур может возратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над каким-нибудь телом. Следовательно, работа идет на увеличение потенциальной энергии  $W$ , которой обладает контур с током в магнитном поле:

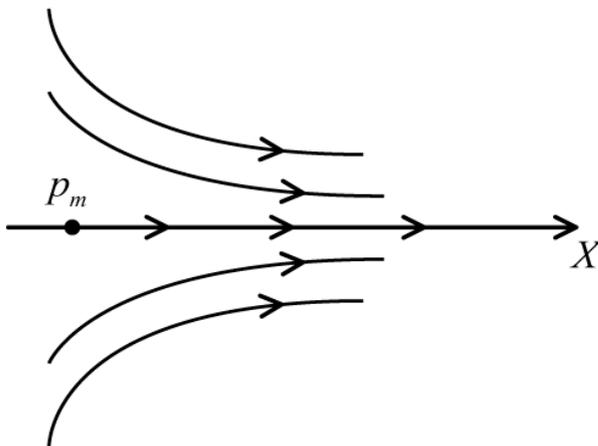
$$dA = N * d\alpha = p_m * B * \sin \alpha * d\alpha$$

$$A_{1,2} = -p_m * B * \cos \alpha = -(\vec{p}_m, \vec{B})$$

$$A_{1,2} = W_p = -(\vec{p}_m, \vec{B})$$

$$\vec{F} = -\nabla W_p \quad \vec{F} = +\nabla(\vec{p}_m, \vec{B})$$

Если  $\vec{p}_m = const$ , то:



$$F_x = -p_m * \frac{dB}{dx}$$

Действуют сила и магнитный момент:

$$d\vec{N} = [d\vec{l}_2, \vec{F}]$$

$$d\vec{F} = I * [d\vec{l}, \vec{B}]$$

$$F = I * \left[ \oint d\vec{l}, \vec{B} \right]$$

$$\oint d\vec{l} \neq 0$$

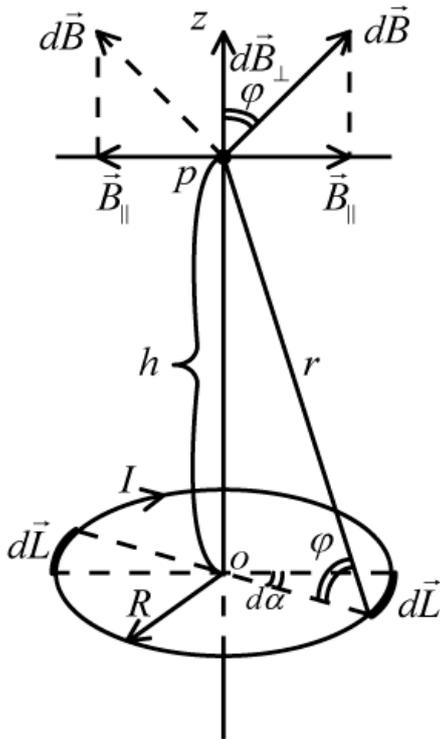
$$\vec{B} = const \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{B} \neq const \Rightarrow \vec{F} \neq 0$$

Если магнитное поле однородно, то диполь только разворачивается, не перемещается.  
 В неоднородном магнитном поле - действует и момент, и сила.

### Магнитное поле контура с током.

Рассмотрим поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (круговой ток). Найдем циркуляцию магнитного поля применив принцип суперпозиций. Из симметрии:



$$dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * [d\vec{l}, \vec{e}_r]}{r^2}$$

Отсюда:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * d\vec{l}}{r^2} * \sin(90) = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * R * d\alpha}{r^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{r}$$

$$dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * R^2 * d\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{I * R^2 * d\alpha}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \int_0^{\pi} dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2\pi * I * R^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\pi R^2$  – площадь, ограниченная контуром

$$I * \pi R^2 = p_m$$

Тогда:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2\pi * \vec{p}_m}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (индукция в произвольной точке на оси)}$$

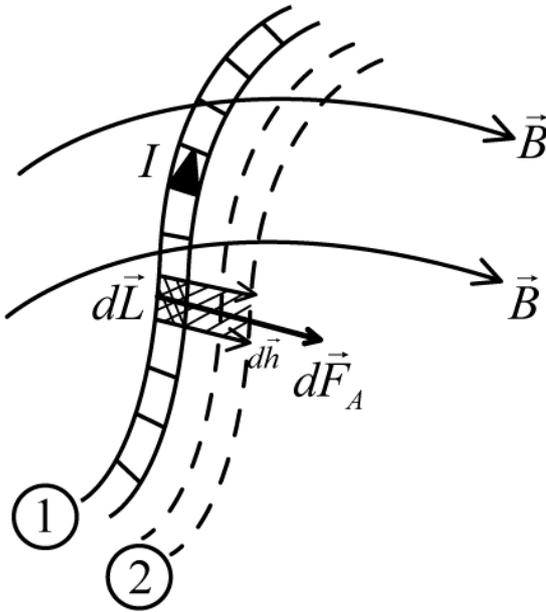
$\vec{B}$  направлен в вдоль оси z

## Работа по перемещению тока в магнитном поле.

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длины  $l$ . Допустим, что этот контур находится во внешнем магнитном поле, которое мы будем предполагать однородным и перпендикулярным к плоскости контура. При перемещении перемычки сила совершит работу:

$$dA = d\vec{F}_A * d\vec{h} = I * [\vec{dl}, \vec{B}] * dh \text{ (смешанное произведение векторов)}$$

$$= I * \vec{B} * [\vec{dh}, \vec{dl}] = I * \vec{B} * d\vec{S}$$



Выясним, как изменится при перемещении перемычки поток магнитной индукции  $\Phi$  через площадь контура:

$$\vec{E} * d\vec{S} = d\Phi_e$$

$$d\Phi_A = \vec{A} * d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} * dS$$

$$dA = I * \vec{B} * [\vec{dh}, \vec{dl}] = I * \vec{B} * d\vec{S} = I * d\Phi_B$$

$$dA = I * d\Phi_B$$

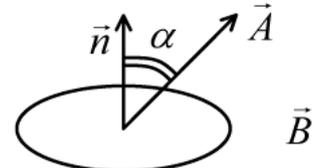
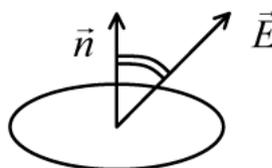
Просуммируем по всем элементам контура:

$$A_{1-2} = I * (\Phi_2 - \Phi_1)$$

При изменениях магнитного потока, пронизывающего контур, в этом контуре ЭДС индукции:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\Delta\varphi = \frac{B * l * V * \Delta t}{\Delta t} = B * l * V$$

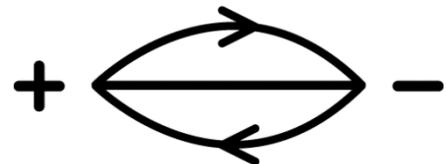


## Дивергенция и ротор магнитного поля.

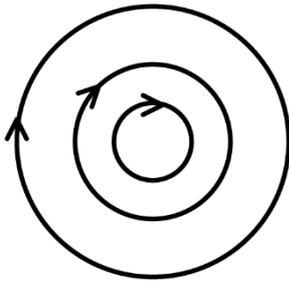
Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии вектора  $B$  не имеют ни начала, ни конца. Поэтому поток вектора  $B$  через замкнутую поверхность должен быть равен 0.

Электрическое статическое поле:

$$\frac{d}{dt} = 0 \quad \oint_L \vec{E} * d\vec{l} = 0 \quad \text{rot}\vec{E} = 0$$



Таким образом, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$ :



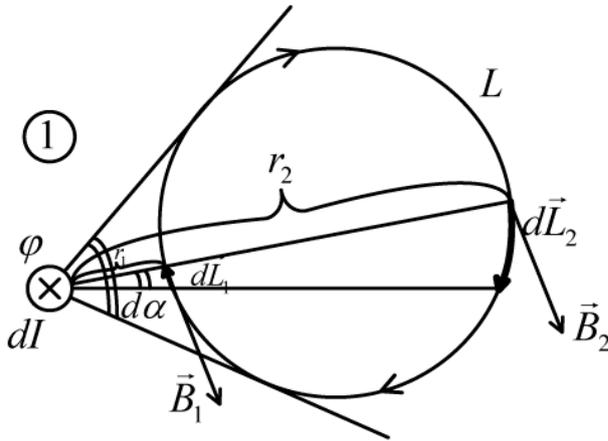
$$\oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0 \quad \frac{d}{dt} = 0$$

Из этого следует, что не существует магнитных зарядов -  $div \vec{B} = 0$ .  
Замкнуто.

$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l}$$

Пусть поле создается токами:

Циркуляция:



$$dC_1 = \vec{B}_1 * d\vec{l}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2I}{r_1} * r_1 * d\alpha$$

$$dC_2 = \vec{B}_2 * d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2I}{r_1} * r_1 * d\alpha$$

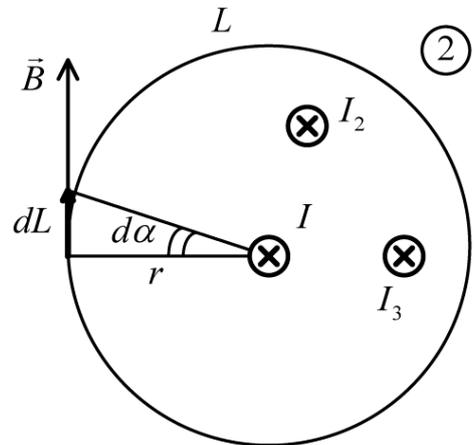
$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = 0 \text{ (если снаружи)}$$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} * d\vec{l} &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} * \frac{2I}{r} * r * d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} * \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= \mu_0 * I \end{aligned}$$

$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 * \sum_{i=1}^N I_i$$

По теореме Стокса (равенство должно выполняться при выборе произвольной поверхности, по которой берутся интегралы):

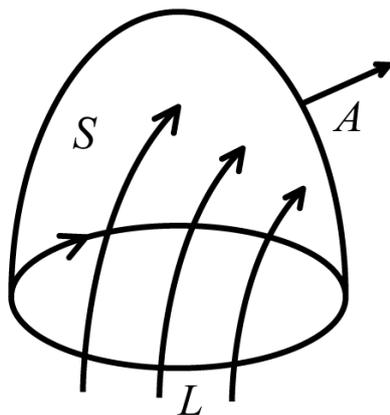
$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 * I$$



$$\oint_L \vec{A} * d\vec{l} = \int_S rot \vec{A} * d\vec{S}$$

$$\int_S rot \vec{B} * d\vec{S} = \mu_0 * \int \vec{j} * d\vec{S}$$

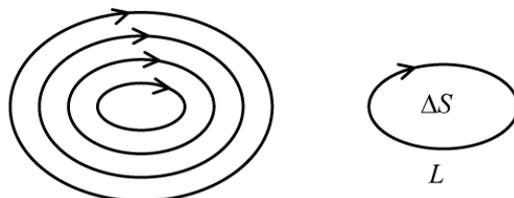
$$rot \vec{B} = \mu_0 * \vec{j}$$



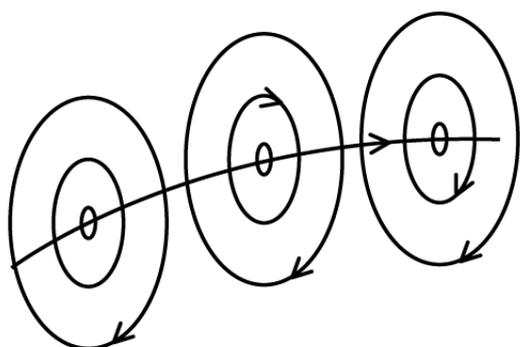
$$\text{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\mathcal{L}} \vec{A} * d\vec{l}$$

Плотность источников завихрений (физический смысл):

Вихревые линии:



$$\oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0$$



$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 * \sum_{i=1}^N I_i, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 * \vec{j}$$

Пока мы знаем:

$$\vec{B}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 * \vec{j}, \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

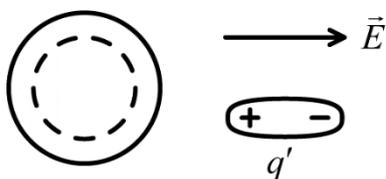
В интегральной форме:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 * \sum_{i=1}^N I_i, \quad \oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0$$

## Магнитное поле в среде

Если несущие ток провода находятся в какой-либо среде, магнитное поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, то есть способно под действие магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

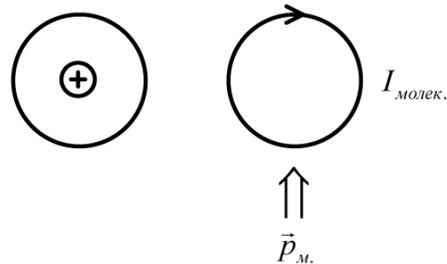
Имеет место поляризация



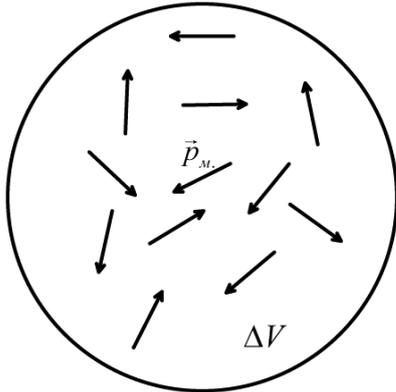
$$\vec{D} = \epsilon * \epsilon_0 * \vec{E}$$

Двигаются электроны => текут токи => в пределах молекулы есть суммарный ток.

У каждого атома есть магнитный момент.



Назовем среду магнетиком



Намагничение магнетика естественно характеризовать магнитным момента единицы объема. Эту величину называют намагниченностью, будем обозначать буквой  $\vec{\chi}$ . Вектор намагниченности для объема  $\Delta V$ :

$$\vec{\chi} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} * \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

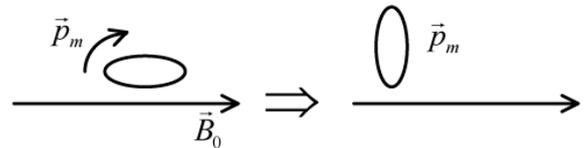
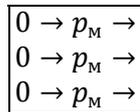
В отсутствие поле намагниченность равна нулю.

Если некоторый элемент объема поместить во внешнее

электрическое поле:

Здесь:

$$\vec{\chi} \neq 0$$



Намагниченное вещество создает магнитное поле  $B'$ , которое накладывается на обусловленное токами поле  $B^0$ . Поле внутри диэлектрика от всех этих диполей:

$$\vec{B} = \vec{B}^0 + \vec{B}'$$

Отсюда, так как поле  $B'$  и  $B^0$ , не имеют источников:

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \vec{B}^0 + \text{div} \vec{B}' = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \vec{B}^0 + \text{rot} \vec{B}' = \mu_0 * \vec{j}$$

$\vec{j}$  – плотность токопроводимости

Нужно найти  $\text{rot} \vec{B}'$ . Возьмем замкнуты контур  $L$ , лежащий в плоскости:

Найдем поток  $\Phi$  молекул через эту площадку.

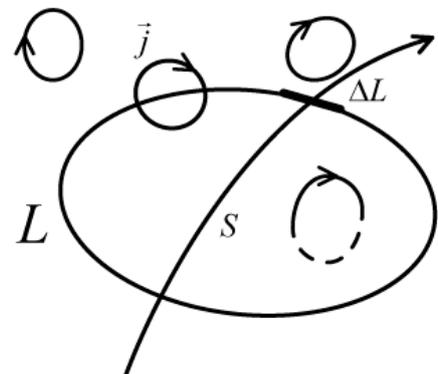
Токи, изображенные на рисунке, не вносят вклад (кроме тех, которые пересекают контур 1 раз)

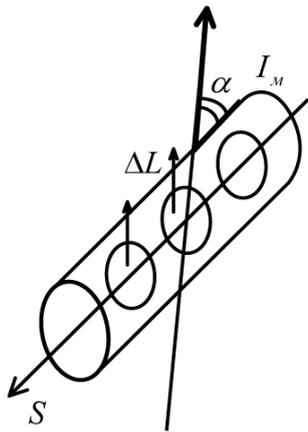
Выберем  $\Delta l$ :

$$S_M * l * I_M * n * \cos \alpha = \vec{\chi} * \Delta \vec{l}$$

$$\int_S \vec{j}' * d\vec{S} = \int_L \vec{\chi} * d\vec{l}$$

$$\int_L \vec{A} * d\vec{l} = \int_L \text{rot} \vec{A} * d\vec{S}$$





По теореме Стокса:

$$\int_L \vec{y} * d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{y} * d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{j} * d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{y} * d\vec{S}$$

Получаем:

$$\vec{j}' = \text{rot} \vec{y}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 * \vec{j} + \mu_0 * \vec{j}' = \mu_0 * \vec{j} + \mu_0 * \text{rot} \vec{y}$$

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{y} \right) = \vec{j}$$

$$\left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{y} \right) = \vec{N} \text{ (вектор направления магнитного поля)}$$

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Полагают, что в каждой точке магнетика.

$$\vec{y} = x \vec{N}, \quad \text{где } x \text{ магнитная восприимчивость (без вел.)}$$

Подставим:

$$\vec{N} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - x \vec{N}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 * (1 + x)}$$

$(1 + x) = \mu$  – относ. магнитная прон. среды

Тогда:

$$\vec{B} = \mu_0 * \mu * \vec{N}$$

Похоже на:

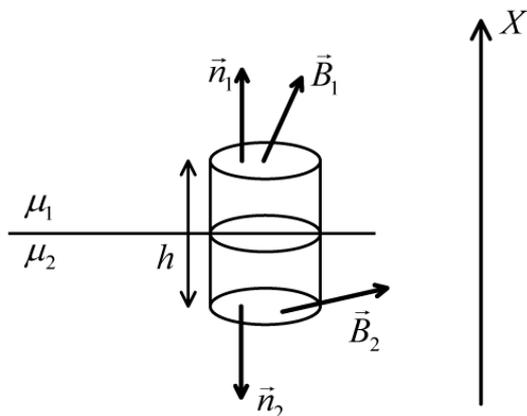
$$\vec{D} = \epsilon * \epsilon_0 * \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{N} = 0$$

$$\text{rot} \vec{N} = 0$$

$$\oint_L \vec{N} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i$$

## Граничные условия для магнитной стат. поля



Возьмем на границе двух магнетиков воображаемую цилиндрическую поверхность некоторой высоты.

Пусть среда терпит разрыв:

Применим т. Гаусса к восстановленному цилиндру

$$\oint \vec{B} * d\vec{S} = 0$$

Пусть  $h \rightarrow 0$ :

$$\vec{B}_1 * \vec{n}_1 + \vec{B}_2 * \vec{n}_2 = 0$$

$$x_1 * B_{1n} = B_{2n}$$

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$

Заменив составляющие вектора  $B$  соответствующими составляющими вектора  $\mathcal{N}$ , умноженными на  $\mu_0 * \mu_2$ , получим соотношение:

$$\mu_0 * \mu_1 * \mathcal{N}_{1n} = \mu_0 * \mu_2 * \mathcal{N}_{2n}$$

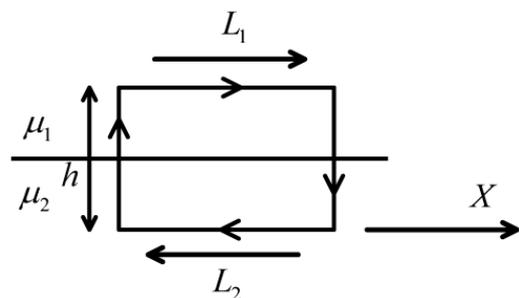
$$\frac{\mathcal{N}_{1n}}{\mathcal{N}_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Теперь возьмем на границе магнетиков прямоугольный контур и вычислим для него циркуляцию  $\mathcal{N}$ :

Частный случай:

$$\vec{j} = 0$$

$$\oint \vec{N} * d\vec{l} = 0 \quad |\vec{l}_1| = |\vec{l}_2|$$



$h \rightarrow 0$ :

$$\vec{N}_1 * \vec{l}_1 + \vec{N}_2 * \vec{l}_2 = 0$$

$$\mathcal{N}_{1y} = \mathcal{N}_{2y}$$

$$\frac{B_{1y}}{B_{2y}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## Виды магнетиков

Формула  $\vec{J} = \chi \vec{H}$  определяет магнитную восприимчивость  $\chi$  единицы объема вещества. Часто вместе с этой восприимчивостью пользуются отнесенной к одному молю вещества молярной  $\chi_M$ . Очевидно, что  $\chi_M = \chi * V_M$ , где  $V_M$  – объем моля вещества.  $\chi$  – [безразмерная],  $\chi_M$  –  $\left[ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} \right]$

1) Диамагнетики:

$$|\chi| \sim 10^{-6}, 10^{-7} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

$$\chi < 0$$

2) Парамагнетики

$$|\chi| \sim 10^{-5}, 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

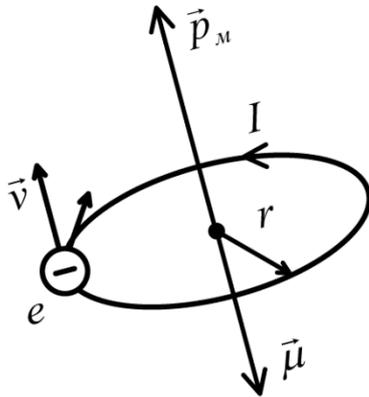
$$\chi > 0$$

3) Ферромагнетики:

$$|\chi| \sim 10^3$$

## Магнитомеханические явления

Представим движение электрона вокруг ядра по окружности:



Так как  $\vec{v}$  быстрый, то в противоположном направлении течет ток  $I$ , а значит есть магнитный момент.  $\vec{v}$  обладает малой массой и движется по окружности, следовательно малый механический момент импульса.

$$\vec{p}_M = I * \vec{S}$$

$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{p}$ , где  $\mu$  орбитальный мех. м. электрона

$$I = \frac{q}{t}, \quad \text{где } t \text{ период вращения по орбите}$$

$$p_M = \frac{e}{T} * \pi r^2 = e * \mathcal{V} * \pi r^2, \quad \text{где } \mathcal{V} \text{ – это частота}$$

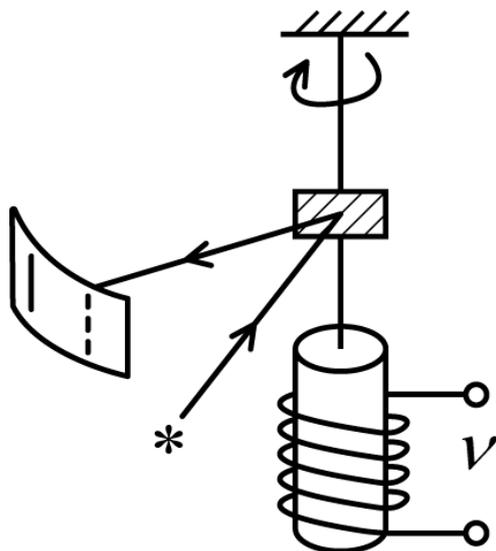
$$\mu = r * mV = r * m * \left( \frac{2\pi r}{T} \right) = r * m * 2\pi * r * \mathcal{V}$$

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется магнитомеханическим или гиромагнитным отношением. Для электрона оно равно:

$$\frac{p_M}{\mu} = \frac{e * \mathcal{V} * \pi r^2}{r^2 * m * 2\pi * \mathcal{V}} = \frac{e}{2m}$$

$$\frac{p_M}{\mu} = - \frac{e}{2m} \quad (\text{т. к. направлен в противол. сторону})$$

В следствии вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых *магнитомеханических явлений*, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Хаасом, второго - Барнеттом. Опыт Эйнштейна и де Хааса (более подробно И.В. Савельев с.167-168):



Цилиндр, магнетик, катушка, генератор ЗСИ:

$$\frac{\Delta \vec{\mu}}{\Delta t} = 0$$

Т.е. полный механический момент тоже поворачивается.

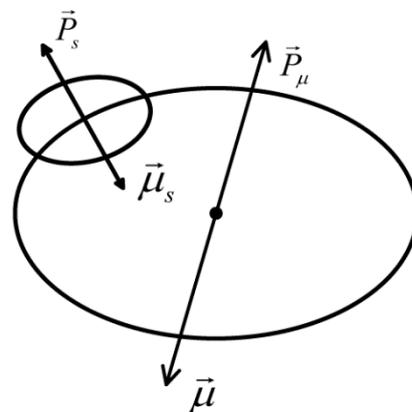
Если  $V$  тока подпирать в резонанс и приклеить зеркало к нитке, что бы свет падал и отражался, то зайчик движется.

Итог:

$$\left(\frac{p_m}{\mu}\right)_{\text{exp}} = -\frac{e}{m}$$

В результате полученный результат превысил ожидаемое значение магнитомеханического отношения в два раза. Почему в 2 раза больше?

Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название *спин*. Таким образом,  $\vec{e}$  имеет  $n$  орбит, и спиновый момент:



Спином обладают не только электроны, Земля вращается вокруг Солнца и своей оси.

$\vec{e}$  нельзя считать шариком. Все микрочастицы обладают спином.

$$\mu_s = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$\hbar$  – постоянная планка

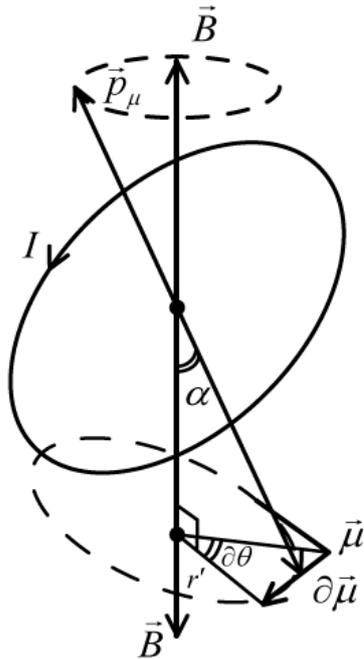
$$\hbar = 1,06 * 10^{-34} \text{ (Дж * с)}$$

Тогда гиромангнитное отношение:

$$\frac{p_s}{\mu_s} = -\frac{e}{m}$$

## Диамagnetизм

К диамagnetикам относятся вещества, которые состоят из атомов, полный магнитный момент которых = 0.



$$\vec{N} = [\vec{p}_M, \vec{B}]$$

$$N = p_M * B * \cos \alpha$$

Концы векторов прецессируют

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{N}$$

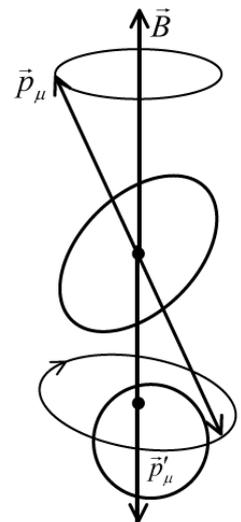
$$\Omega = \frac{m * g * l}{I * w}$$

(Из задачи про волчок)

$$d\theta = \frac{d\mu}{r'} = \frac{p_M * B * \sin \alpha * dt}{\mu * \sin \alpha} = \frac{e * B}{2m} dt$$

Угловая скорость прецессии (частота Лармора)

$$\omega_L = \frac{d\theta}{dt} = \frac{e * B}{2m}$$



Частоту Лармора, так же называют частотой ларморовой прецессии. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

## Парамагнетизм

Если магнитный момент атомов отличен от нуля, вещество оказывается парамагнитным.

Магнитное пол стремится установить магнитные моменты атомов вдоль B. Тепловое движение стремится разбросать их равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация моментов вдоль поля, тем большая, чем больше B, и тем меньшая чем выше температура.

Кюри экспериментально установлю закон, согласно которому восприимчивость парамагнитного вещества равна:

$$\chi_M = \frac{C}{T}$$

, где C – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества, T – абсолютная температура.

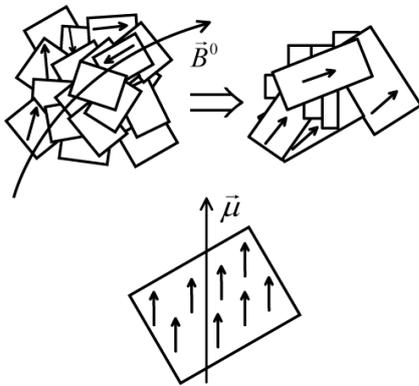
## Ферромагнетики

Особый класс образуют вещества, способные обладать намагничённостью в отсутствие внешнего магнитного поля. По-своему наиболее распространённому представителю – железу – они получили название – ферромагнетики. К их числу кроме железа принадлежат никель, кобальт,

гадолиний их сплавы и соединения и т.д. Ферромагнетизм присущ этим веществам только в твердом состоянии.

Ферромагнетики – сильно магнитные вещества.

С помощью лупы можно увидеть:



При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы, которые заставляют магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничения, которые называются доменами.

Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничивания оказывается различным. Введем внешнее магнитное поле и будем

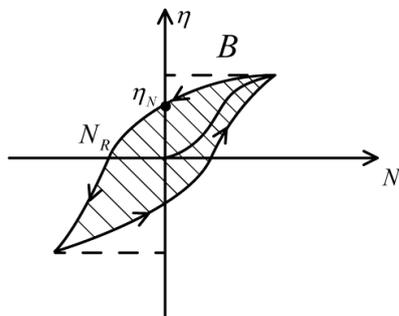
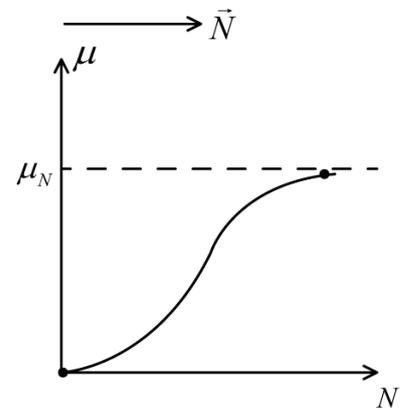
его увеличивать:

Кривая начала намагничивания. Иллюстрация происходящего см. выше

Теперь уменьшим поле. Индукция  $B$  следует не по первоначальной кривой, а изменяется. В результате, когда напряженность внешнего поля становится равной нулю, намагничение не исчезает, а становится и характеризуется

величиной  $B_r$ , которая называется остаточной индукцией.

Намагниченность при этом имеет значение  $\mathcal{U}_r$ , называемое остаточной намагниченностью. Индукция  $B$  обращается в нуль лишь под действие поля  $\mathcal{N}_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызывающему коэрцитивной силой. При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция изменяется в соответствии с кривой, которая называется петля гистерезиса:



Остаточная намагниченность делает возможным изготовление постоянных магнитов.

Намагниченность ферромагнетиков связана с изменением размера доменов => нелинейная характеристика!

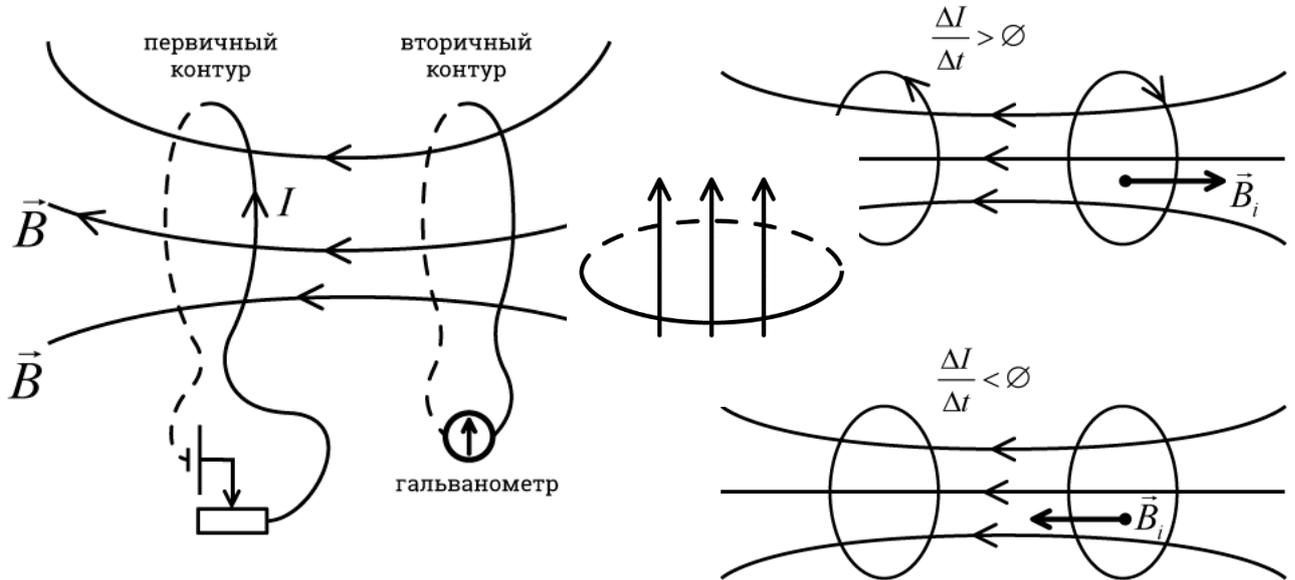
Ферромагнетизм проявляется в определенном интервале температур. При выходе за интервал которых области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства, при возвращении в интервал – свойства возвращаются:

$$T_{k.1} < T < T_{k.2}$$

, где  $k$  – критическая температура

## Электромагнитная индукция

В 1831 г. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток индукционным.



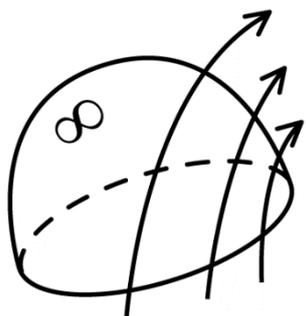
Закон электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Знак минус в этом уравнении связан с определенным правилом знаков.

Циркуляция вектора  $E$  поля по любому неподвижному контуру определяется как

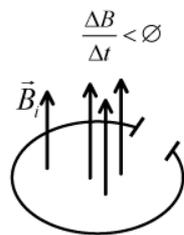
$$\oint E dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$



Так как поток  $\Phi = \int B dS$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int B dS = \int \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

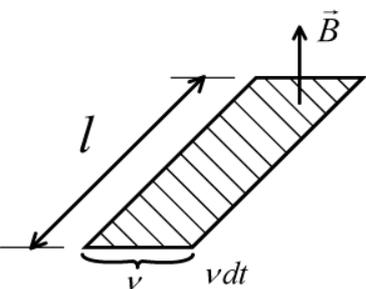
$$\oint E dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} dS$$



Данное уравнение имеет ту же структуру, что и  $\oint B dl = \mu_0 \int j dS = \mu_0 \int i_n dS$  уравнение, причем роль вектора  $j$  играет вектор  $-\frac{\partial B}{\partial t}$ . Оно может быть преобразовано в дифференциальную форму так же, как и  $\nabla \times E = \mu_0 j$  уравнение. И в результате мы получим

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Это уравнение выражает локальную связь между электрическими и магнитными полями: изменение поля  $B$  во времени в данной точке определяет ротор поля  $E$  в этой же точке.

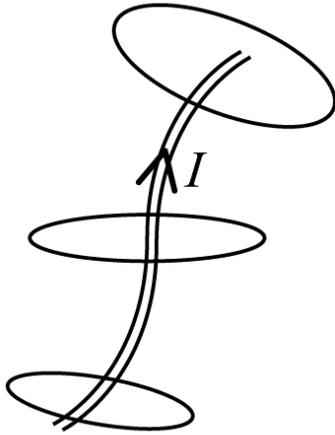


В связи с законом электромагнитной индукции можно представить в таком виде:

$$\oint E dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [vB] dl$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, представляет собой полную производную  $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .

## Самоиндукция



Величину

$$\Psi = \sum \Phi$$

Называют потокоцеплением или

полным магнитным потоком.

$$\Psi = \sum \Phi$$

$$\Psi = N\Phi$$

Воспользовавшись потокоцеплением, выражение для э.д.с., индуцируемой в соленоиде, можно записать в виде  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$

При изменении силы тока в контуре возникает э.д.с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ :

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$$

Если при изменении тока индуктивность L остается постоянной (не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков), то:

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} (L = const)$$

## Ток при замыкании и размыкании цепи

В цепи будет течь постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

В момент времени  $t = 0$  отключим

источник тока замкнув

одновременно цепь накоротко переключателем 2. Как только сила тока в цепи станет убывать, возникнет э.д.с. самоиндукции.

Сила тока в цепи будет в соответствии с законом Ома удовлетворять уравнению  $iR = \mathcal{E}_s =$

$$-L \frac{di}{dt}$$

Перепишем это выражение так:

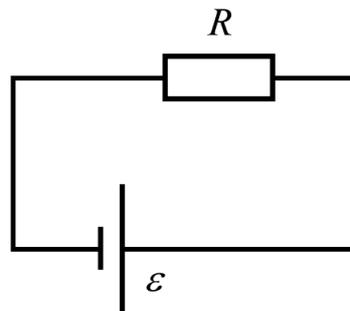
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

Проинтегрируем:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

Откуда

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln const$$



Потенцирование этого соотношения дает

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной:

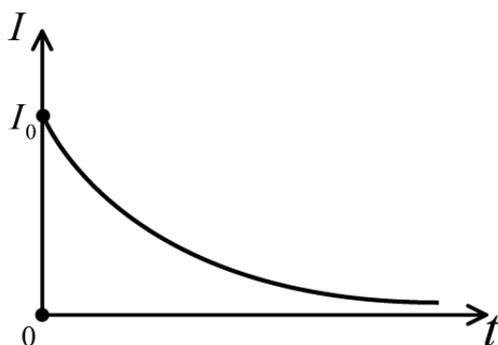
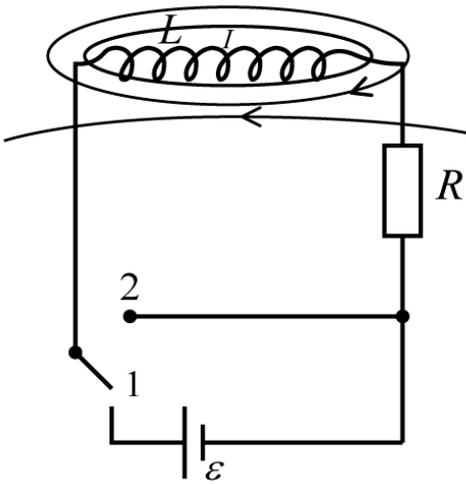
$$\tau = \frac{L}{R}$$

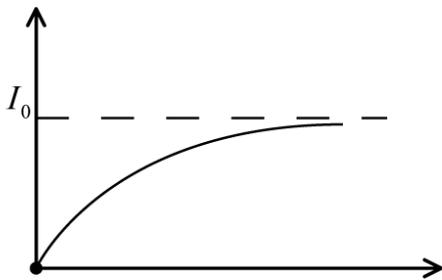
Которую называют постоянной времени цепи. Этой формуле можно придать вид:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

В соответствии с этой формулой  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Теперь рассмотрим случай замыкания цепи. После подключения к источнику тока, в цепи кроме э.д.с. будет действовать э.д.с. самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома можно написать, что





$$iR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt}$$

Преобразуем к следующему виду:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Общее решение уравнения можно написать следующим образом:

$$i = I_0 + \text{const} * e^{-\frac{R}{L}t}$$

В начальный момент сила тока  $i$  равна нулю. Отсюда для  $\text{const}$  получается значение  $\text{const} = -I_0$ . Таким образом,

$$i = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

## Взаимная индукция

Возьмем два контура 1 и 2, расположенные друг относительно друга не очень далеко. Если в первом контуре течет ток силы  $i_1$ , он создает через другой контур пропорциональный  $i_1$  полный поток

$$\Psi_2 = L_{21}i_1$$

При изменениях тока  $i_1$  во втором контуре индуцируется э.д.с.

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

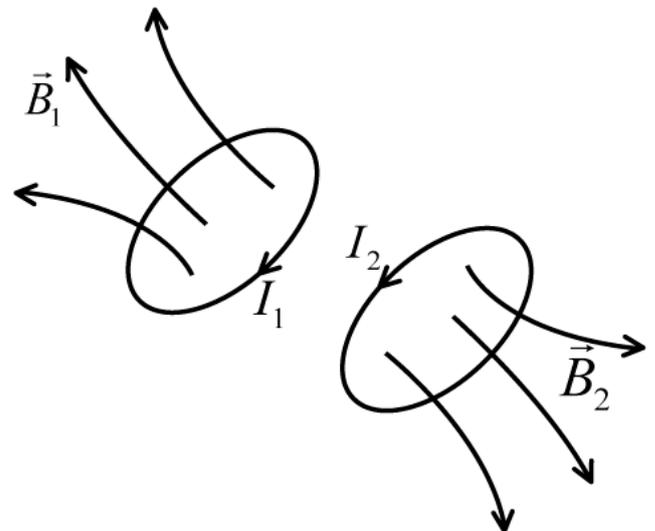
Аналогично, при протекании во втором контуре тока силы  $i_2$  возникает связанный с первым контуром поток

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

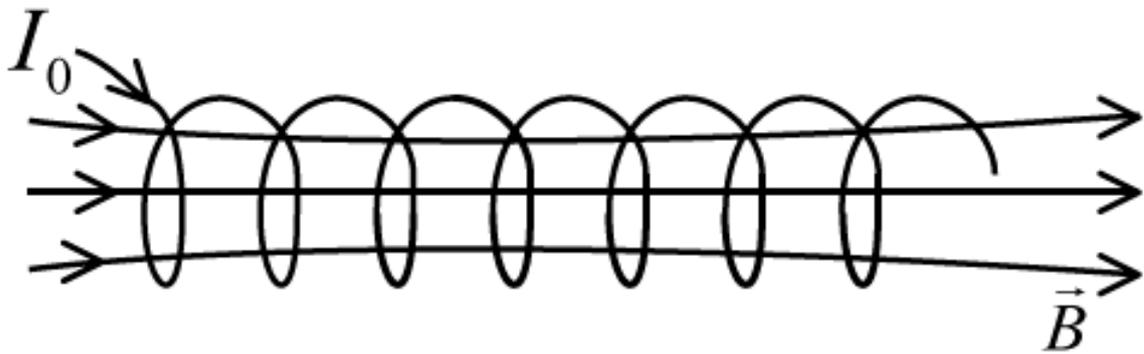
Контуры 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения э.д.с. в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется *взаимной индукцией*.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *взаимной индуктивностью* (или *коэффициентом взаимной индукции*) контуров.

$$L_{12} = L_{21}$$



## Энергия магнитного поля



Работа, совершаемая током за время  $dt$ , равна

$$dA = \varepsilon_S i dt = - \frac{d\Psi}{dt} i dt = -i d\Psi$$

Если индуктивность соленоида не зависит от  $i$  ( $L = const$ ), то  $d\Psi = L di$  и выражение принимает следующий вид:

$$dA = -L i di$$

Проинтегрировав это выражение по  $i$  в пределах от первоначального значения  $i$  до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = - \int_i^0 L i di = \frac{L i^2}{2}$$

Формула  $W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L}$  выражает магнитную энергию тока через индуктивность и ток (при отсутствии ферромагнетиков). Подстановка в формулу выражения  $L = \mu \mu_0 n^2 V$  дает

$$W = 1/2 L I^2 = 1/2 \mu \mu_0 n^2 I^2 V$$

А так как  $nI = H = B / \mu \mu_0$ , то

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{BH}{2} V$$

Эта формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем  $V$ .

В общей теории показывается, что энергию  $W$  можно выразить через векторы  $B$  и  $H$  в любом случае по формуле

$$W = \int \frac{BH}{2} dV$$

Магнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

В гауссовой системе формулы для плотности энергии магнитного поля выглядят следующим образом:

$$\omega = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi}$$

## Уравнение Максвелла

Ток смещения

Первая пара уравнений Максвелла

$\oint \vec{E}_1 d\vec{l} = - \int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S}$  – это уравнение связывает значение  $E$  с временными изменениями вектора  $B$  и является законом электромагнитной индукции

$\oint_S \vec{B}_n d\vec{S} = 0$  – это уравнение отражает свойство вектора  $B$ , что его линии замкнуты (или уходят в бесконечность)

Вторая пара уравнений Максвелла

$\oint \vec{H}_1 d\vec{l} = \int_S j_n d\vec{S} + \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}$  – это уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем

$\oint_S \vec{D}_n d\vec{S} = \int_V \rho dV$  – линии вектора  $D$  могут начинаться и оканчиваться на зарядах

$$\int_S (\text{rot } \vec{E}) d\vec{S} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

Оба интеграла берутся по одной и той же поверхности. Поэтому равенство можно записать:

$$\int_S \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$$

В каждой точке пространства выполняется равенство

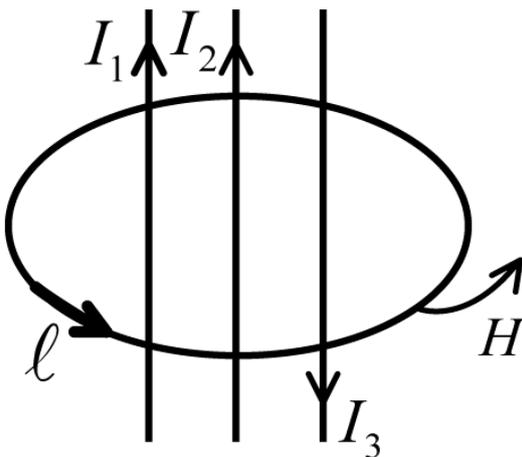
$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Применив теорему Стокса, найдем, что

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Теперь применим теорему Остроградского – Гаусса к

левой части формулы ( $\oint_S \vec{D}_n d\vec{S} = \int_V \rho dV$ ). В результате получим уравнение



$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$

При произвольном выборе объема, полученное соотношение может выполняться лишь при условии, что подынтегральные выражения в обеих частях имеют в каждой точке пространства одинаковые значения, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Применение теоремы Остроградского-Гаусса к формуле  $\oint_S \vec{B}_n d\vec{S} = 0$  дает

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

В дифференциальной форме уравнения Максвелла выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(первая пара уравнений),

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

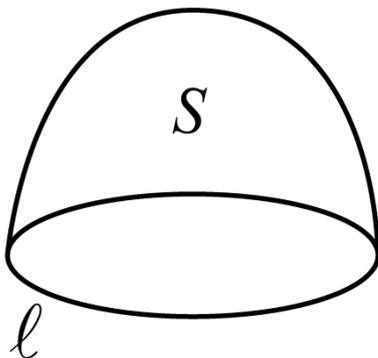
(вторая пара уравнений)

Про  $\operatorname{rot} H$ :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_{\alpha} \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS$$

Пояснение:



$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} dS = \int_S \vec{j} dS + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dS$$

По теореме Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \int_{\alpha} \vec{A} d\vec{l}$$

Отсюда (если функции гладкие)

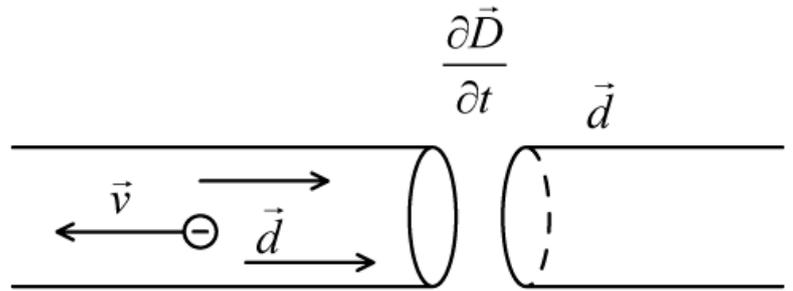
$$\int_{\alpha} \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS$$

Физический смысл тока смещения

Ток смещения позволяет сделать линии непрерывными

Ток смещения – линии индукции переменного тока

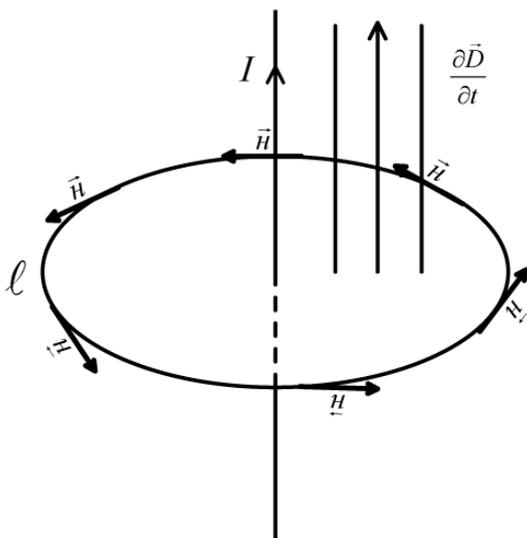
Закон электромагнитной индукции Фарадея



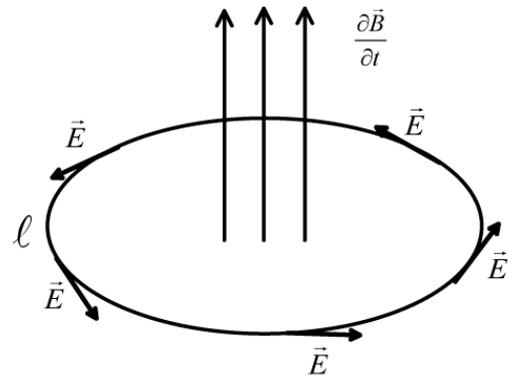
$$\oint_{\alpha} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s}$$

Полный ток = ток проводимости + ток смещения

Рассмотрим уравнения (1) и (2):



Переменное магнитное поле:



Отсюда: (3)

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

Магнитных зарядов не существует (4):

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

В какой форме существует и распространяется электромагнитное поле?

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Эти соотношения + уравнение Максвелла + граничные условия = ответ на вопрос

## Волновое уравнение

Напишем уравнения Максвелла для однородной нейтральной ( $\rho = 0$ ) непроводящей ( $j = 0$ ) среды с постоянными проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$ . В этом случае

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Применим операции  $\operatorname{rot}$  к первому уравнению

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Воспользуемся анализом:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\nabla$  – операция Лапласа

Декартова система координат!

Воспользуемся этим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = -\nabla^2 \vec{H}$$

Т.к.  $\operatorname{div} \mu \mu_0 \vec{H} = 0$ , то  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$

Тогда:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \right) = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Получаем:

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Что это? В первом семестре было волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Т.е. мы получили волновое уравнение с  $\text{rot } \vec{E}$  и получить то же самое для  $\vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} \text{— фазовая скорость распространения}$$

В вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 * 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

В вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света.

Возьмем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Любая функция вида:

$$\xi = \xi \left( t - \frac{x}{v} \right) \text{— решение уравнения}$$

В частности, решение волнового уравнения является следующее решение:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

$\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число, равное  $\omega/v$

Рассмотрим поверхность равных фаз:

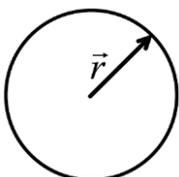
$$\omega t' = \vec{k} \vec{r} = \text{const}$$

$$\frac{k}{|\vec{k}|} = \vec{n} \text{— единичный вектор}$$

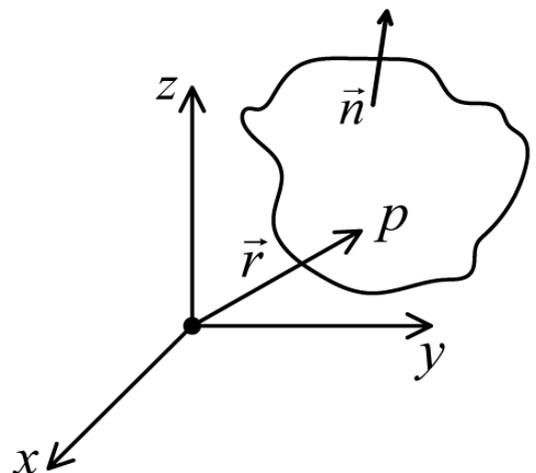
$\vec{n} \vec{r} = \text{const}$  — нормальное уравнение плоскости

Волна плоская, т.к. поверхность равных фаз — плоскость. В природе плоских волн не бывает, т.е. они не убывают, а должны.

В природе существует лишь сферические волны.



$$\frac{\cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})}{r}$$



Удовлетворяет условию излучения (энергия не может уходить на бесконечность)

Любой сигнал можно разложить по плоским волнам:

$$F(t) \sim \sum a_i \cos(\omega_i t - \vec{k}\vec{r}) + \sum b_i \sin(\omega_i t - \vec{k}\vec{r})$$

Свойства плоских волн:

1. Ортогональность:

$\vec{E} \perp \vec{H}$  в любой момент времени

2. Поперечность:

$\vec{E} \perp \vec{H}, \vec{H} \perp \vec{K}$

3. Синфазность:

E и H колеблются с нулевым смещением

4.  $E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$

$$E = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} H$$

В вакууме:

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H$$

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 * 10^9$$

Отсюда

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 4\pi * 10^{-7} * 9 * 4\pi * 10^9$$

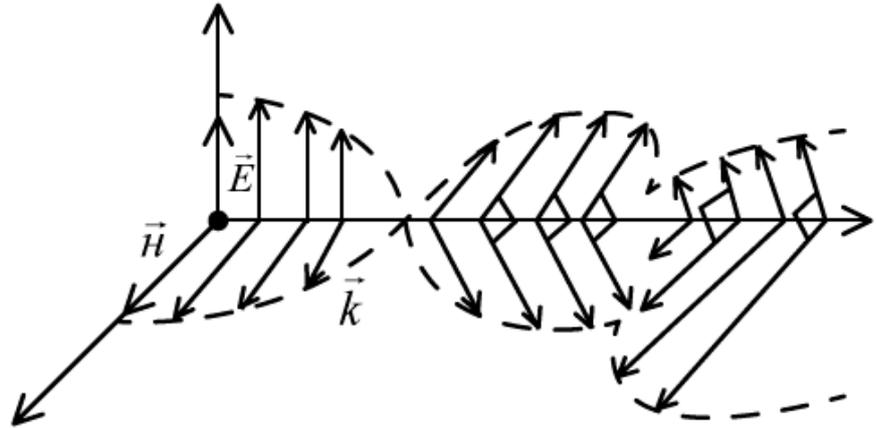
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi(\text{Ом})$$

$$E = 120\pi H$$

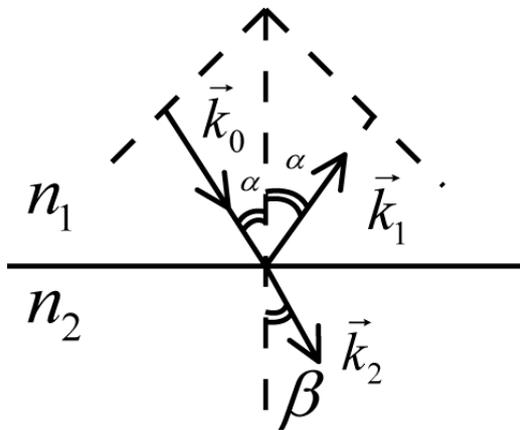
$\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют правую тройку векторов

$\vec{E}$  – волновой вектор

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$



Явления на границе двух сред формулы Френеля



Рассмотрим границу двух сред

$$\vec{E}_0 = E_0^m * e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \vec{r})}$$

Метод комплексных амплитуд:

$$\cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rightarrow e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv i\vec{k}$$

От ответа берут вещественную часть:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$f(z) = \text{Re} f$$

Отсюда

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^m * e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^m * e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})}$$

1)  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$

2)  $\vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2$  – компланарны, т.е. лежат в одной плоскости

3)  $\alpha = \alpha_1$

4) Закон Снелля:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

## Формулы Френеля

Рассмотрим плоскую границу двух сред. Пусть плоская волна падает

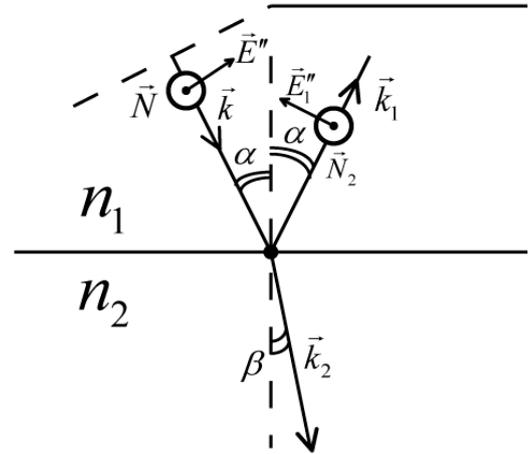
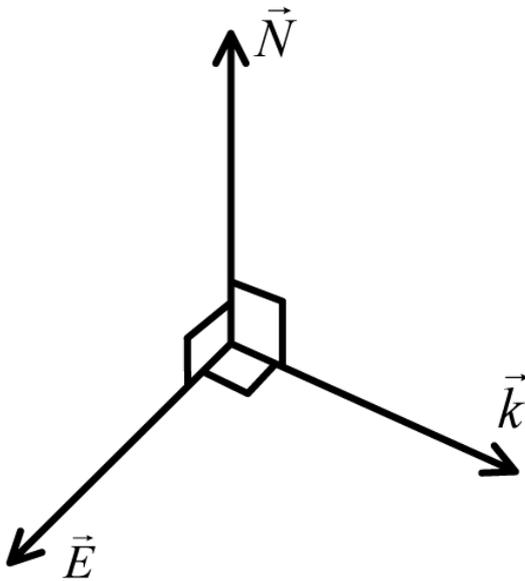
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \text{ — закон Снелля}$$

$$\omega = \text{const}$$

По классической теории отражение, преломление и т.д. не меняет частоту

Электромагнитная волна:

Правая тройка векторов



Рассмотрим 2 типа поляризации:

1. E – поляризация.

$\vec{E}$  – в плоскости рисунка

$\vec{H}$  – на нас

$\vec{A}$  – на нас и ортогонально плоскости рисунка

Найдем соотношение:

$$E'' \cos \varphi - E_1 \cos \varphi_1 = E_2 \cos \varphi_2$$

$$H'' + H_1 = H_2$$

$$E'' - E_1 = E_2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi} \quad (1)$$

Связь:

$$E \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H \sqrt{\mu \mu_0}$$

$$\sqrt{\epsilon \mu} = n$$

$$n = \sqrt{\epsilon} \text{ (с высокой точностью, т. к. магнитные свойства слабые)}$$

Разность  $E_0 + E_1$

$$E'' + E_1 = E_2 \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \quad (2)$$

Отсюда (из (1) и (2))

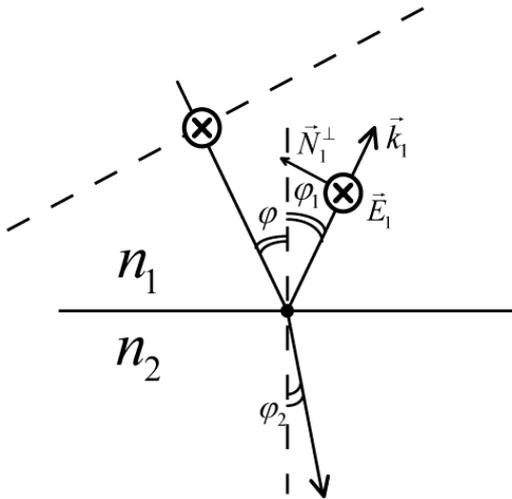
$$\frac{E'' - E_1''}{E'' + E_1''} = \frac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1} \equiv \xi$$

$$E_1'' = \frac{E''(1 - \xi)}{1 + \xi}$$

$$\begin{cases} E_1'' = E_0'' \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_2)} \\ E_2'' = E'' \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_2)} \end{cases}$$

## Первая пара законов параллельной поляризации

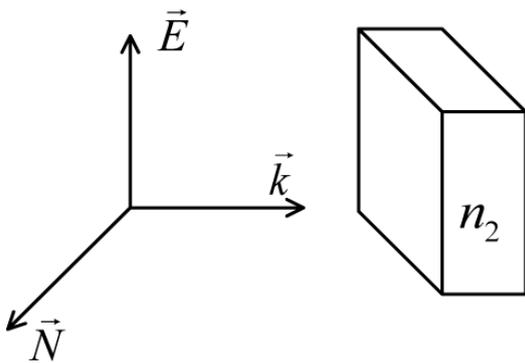
Нормальная поляризация:



$$\begin{cases} H^+ \cos \varphi - H_1^+ \cos \varphi = H_2^+ \cos \varphi_2 \\ E^+ + E_1^+ = E_2^+ \end{cases}$$

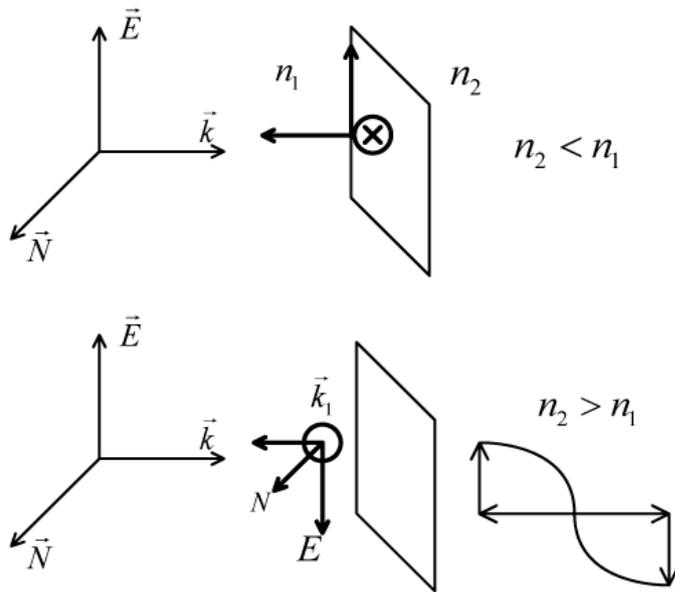
Вторая пара формул Френеля

Случай нормального падения ( $\varphi = 0, \varphi_2 = 0$ )



$$\begin{cases} E_1 = E \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ E_2 = E \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$$

Если  $n_2 > n_1$ , то  $E_1 \rightarrow (" - ")$

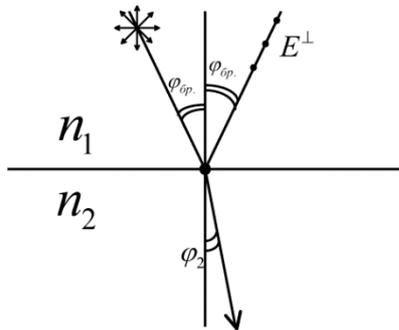


Если  $\varphi + \varphi_2 = \pi/2$ , то  $E_1'' = 0$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_{\text{бр}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Рассмотрим произвольную волну:

У отраженной волны нет параллельной поляризации!

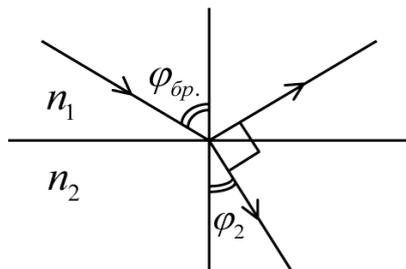


$$\varphi_{\text{бр}} = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1}$$

Поясняющий рисунок

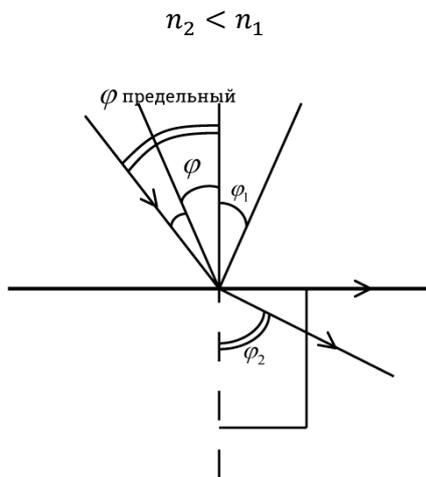
$$\frac{\sin \varphi_{\text{бр}}}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin \varphi_{\text{бр}}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{бр}})} = \frac{n_2}{n_1}$$

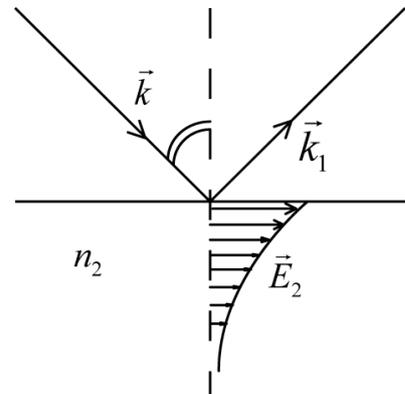


## Эффект полного внутреннего отражения

Рассмотрим случай



Если  $\varphi > \varphi_{\text{пред}}$



$$R = \left(\frac{E_1}{E}\right)^2 \Rightarrow R'', R'$$

$$\tau = \left(\frac{E_2}{E}\right)^2 \Rightarrow \tau'', \tau'$$

Коэффициент отражения и преломления

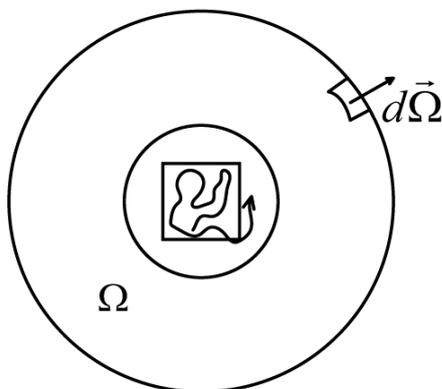
## Вектор Пойнтинга

Векторы  $E$  и  $H$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[EH]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  ( $\sin \alpha = 1$ ). Следовательно, вектор плотности потока энергии можно представить как векторное произведение  $E$  и  $H$

$$S = [EH]$$

Вектор  $S$  называется *вектором Пойнтинг*, показывает направление распространения энергии электромагнитной волны.

Пусть существует система излучателей окруженной сферой:



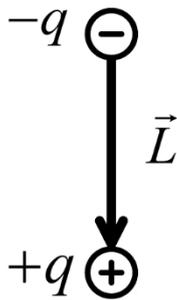
Поток энергии  $\omega$ , т.е. количество энергии, переносимое волной в единицу времени через некоторую поверхность  $\Omega$ , равен

$$\omega = \oint_{\Omega} S d\Omega$$

$S$  – нормальная составляющая вектора  $\Omega$ ,  $d\Omega$  – элемент поверхности  $S$

## Источник излучения ЭМВ

Рассмотрим диполь:

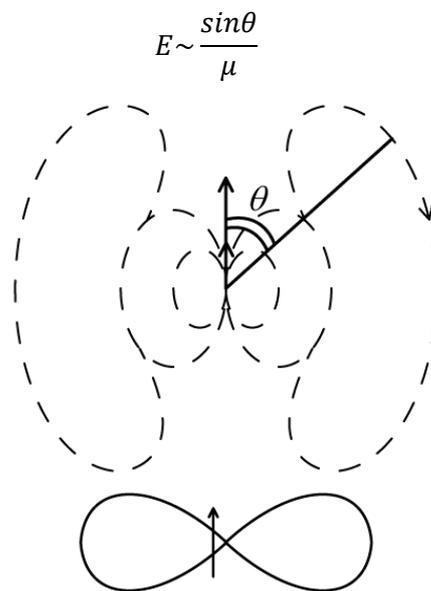


$$r = ql$$

$$l = l_0 \cos \omega t$$

$$r = r_m \cos \omega t$$

Пусть расстояние между зарядами периодически меняется  $\Rightarrow$  дипольный момент тоже будет меняться. Переменный диполь – источник ЭМВ.

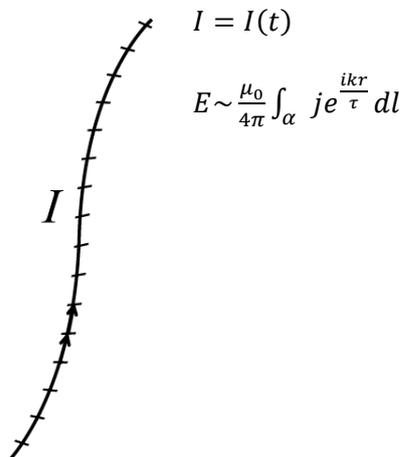


## Диполь Герца

$$E \sim \frac{e^{ikr}}{|r|}$$

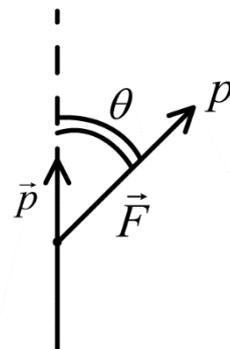
Источник ЭМВ – токи проводимости

Пусть есть провод, по которому течет переменный ток:



$$I = I(t)$$

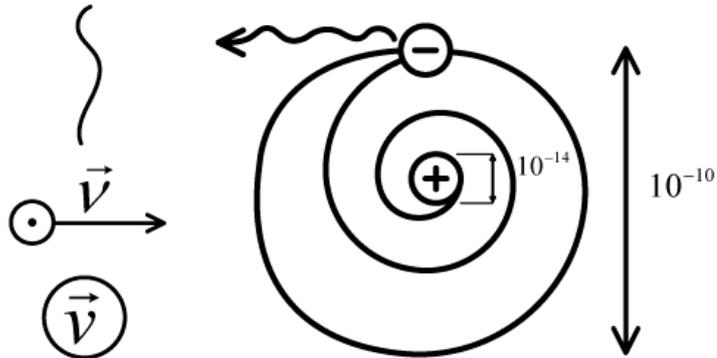
$$E \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\alpha} j e^{\frac{ikr}{\tau}} dl$$



## Можность диполя Герца

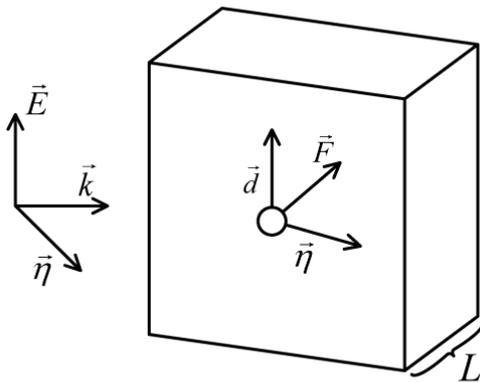
$$p \sim (\ddot{p}) \sim pm^2 \omega^4$$

Любой заряд, движущийся с ускорением, обязательно излучает ЭВМ



## Импульс ЭМВ

Представим широкую магнитную пластинку на которую падает эмв



$$F = \frac{\Delta k}{\Delta t}$$

$$\Delta t = 1 \text{ c}$$

$$\Delta S = 1 \text{ м}^2$$

$$j = \sigma E$$

$$\Delta k = \mu j H l$$

$$\Delta w = j E$$

$$\frac{\Delta k}{\Delta w} = \mu_0 \frac{H}{E}$$

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

$$\frac{\Delta k}{\Delta w} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

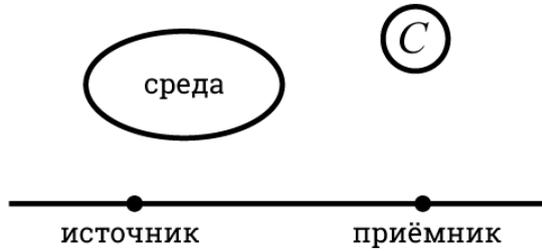
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\frac{k}{w} = \frac{1}{c}$$

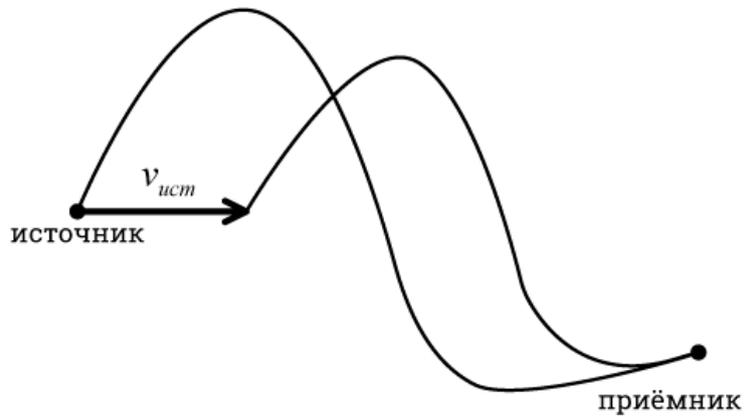
## Эффект Доплера

Случай 1 – упругая среда (механические волны, упругие полны)

Пусть есть среда, источник, приемник.



1.1 Источник движется, приемник покоится



$$\lambda = \lambda_0 - v_{ист} T_0$$

$T_0$ - период колебаний

$$\lambda_0 = \frac{c}{v_0} \quad T_0 = \frac{1}{v_0}$$

Тогда:

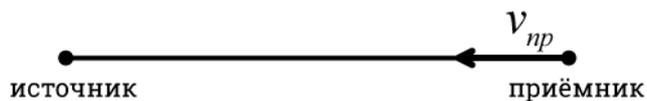
$$\frac{c}{v} = \frac{c}{v_0} - \frac{v_{ист}}{v_0}$$

$$v_0 c = v(c - v_{ист})$$

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v_{ист}}{c}\right)$$

Формула при движении источника к приёмнику

1.2. Источник покоится, приемник движется ему навстречу.



Промежуток времени между сигналами:

$$T = T_0 - \frac{\lambda_0}{c + v_{\text{пр}}}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{c}{(c - v_{\text{пр}})v_0}$$

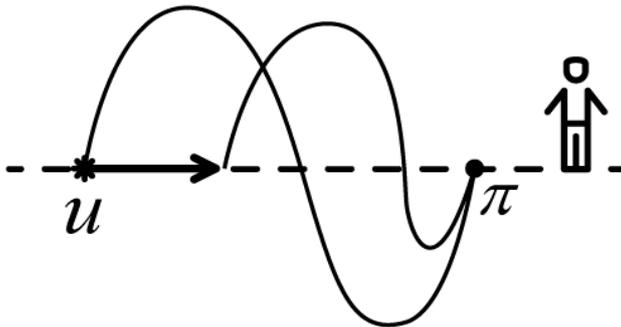
$$v = \frac{v_0}{\frac{v_{\text{пр}}}{c} + 1}$$

Эффект Доплера

В акустике изменения частоты, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника по отношению к среде, являющейся носителем звуковых волн

1. Акустика (упругая среда)

1.



$\lambda$  – изменяется

$c$  – скорость распространения упругих волн в среде (зависит от среды)

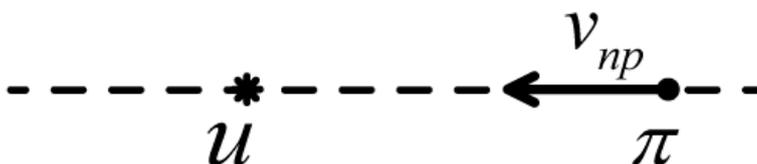
Частота волны, регистрируемая приемником

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v_{\text{ист}})T_0} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_{\text{ист}}}{c}} \quad (1)$$

$$T_0 = \frac{1}{v_0}$$

$v_0$  – частота колебаний источника

2.



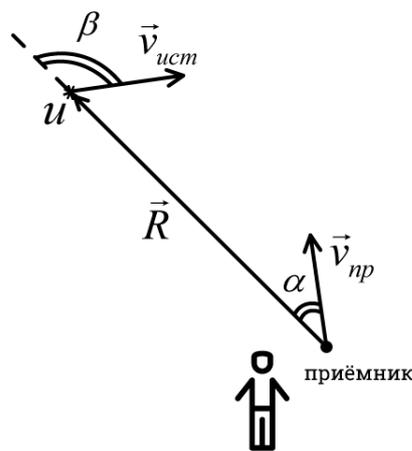
$\lambda$  не меняется

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью  $v_{пр}$  вдоль соединяющей их прямой, то длина волны в среде  $v = \frac{v}{\lambda_0}$ . Однако, скорость распространения волны относительно приемника равна  $c + v_{пр}$ , так что частота волны, регистрируемая приемником

$$v = \frac{c + v_{пр}}{\lambda_0} = v_0 \left(1 + \frac{v_{пр}}{c}\right)$$

Общий случай

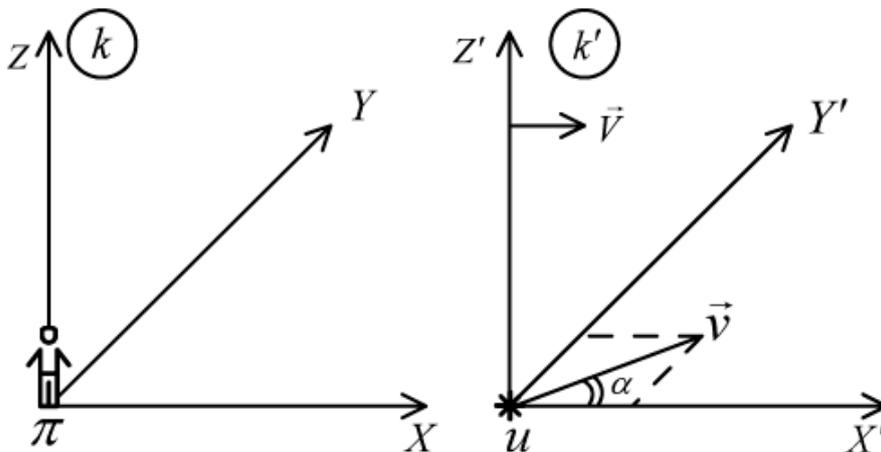
Среда упругая, движутся оба



В самом общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями

$$v = v_0 \frac{1 + \frac{v_{пр}}{c} \cos \alpha}{1 + \frac{v_{ист}}{c} \cos \beta}$$

Эффект Доплера для ЭМВ



При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга также наблюдается **эффект Доплера**, т.е. изменение частоты волны, регистрируемой

приемником. В отличие от рассмотренного нами эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить только на основе специальной теории относительности.

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Где  $k$  – волновое число

$$\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i(\omega' t' + \vec{k} \vec{r}')} = \vec{E}_0' e^{i(\omega' t' + kx' \cos\alpha + ky' \sin\alpha)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + kx \cos\alpha + ky \sin\alpha)}$$

Из преобразований Лапласа

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y' \quad z = z'$$

Фаза

$$\omega t + kx \cos\alpha + ky \sin\alpha = \omega\gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) + k(x' + \beta ct')\cos\alpha + y' \sin\alpha$$

$$= \omega\gamma t' + \omega\gamma \frac{\beta}{c}x' + k\gamma x' \cos\alpha + k\gamma\beta ct' \cos\alpha + y' \sin\alpha$$

$$= t'(\omega\gamma + k\gamma\beta c \cos\alpha) + x' \left(k\gamma \cos\alpha + \omega\gamma \frac{\beta}{c}\right) + y' \sin\alpha$$

$$\omega' = \omega\gamma(1 + \beta \cos\alpha)$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right)$$

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right)}$$

Отсюда соотношение, описывающее эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, имеет вид:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right)} \quad (2)$$

Сравним акустику и ЭМВ.

Нет угла  $\beta$ . В чем еще различия?

При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника, релятивистская формула эффекта Доплера(2) совпадает с классической формулой(1)

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается продольный эффект Доплера.

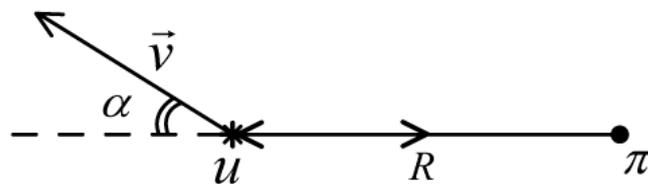
Рассмотрим частный случай

1. В случае сближения источника и приемника( $\alpha = \pi$ )

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}} \sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v}{c}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} > v_0$$

$$\lambda < \lambda_0$$

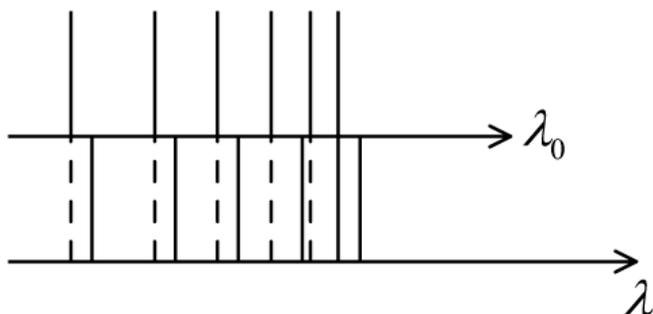
2. А в случае их |



$$\lambda > \lambda_0$$

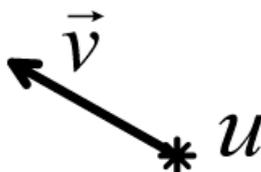
$$\lambda < \lambda_0$$

У каждого атома есть спектр

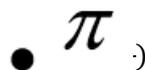


«Красное смещение»

Хабл: чем дальше галактика, тем быстрее удаляется (расширяется Вселенная)



Существует поперечный эффект Доплера, когда источник движется по окружности, приемник в центре.

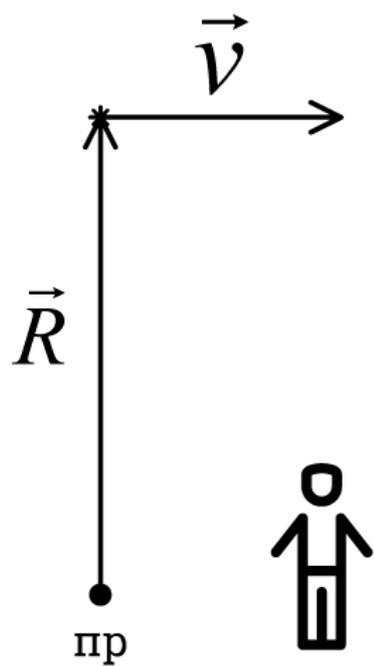


Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы, поперечный эффект пропорционален отношению  $\frac{v^2}{c^2}$ , следовательно он значительно слабее продольного, который пропорционален  $\frac{v}{c}$ .

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие: одна обеспечивает продольный эффект, другая – поперечный.

Существование поперечного эффекта Доплера следует непосредственно из замедления времени в движущихся системах отсчета.



Поперечный эффект Доплера (только в случае ЭМВ)

$\lambda > \lambda_0$  (частота уменьшается)