

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

---

А. М. АЛЬТМАРК    В. В. МОРОЗОВ    И. А. ЧЕРЕМУХИНА

## **МЕХАНИКА**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2016

УДК 531(07)

ББК В2я7

А58

**Альтмарк А. М., Морозов В. В., Черемухина И. А.**

А58 Механика: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 50 с.

ISBN 978-5-7629-1986-9

Содержит основы теории и методики экспериментального исследования. Описания к работам включают задание для подготовки и перечень контрольных вопросов.

Данное пособие продолжает описание лабораторных работ по механике (начатое в методических указаниях А. М. Альтмарка, В. В. Морозова, И. Л. Шейнмана и др. «Механика и термодинамика», 2013). Этим объясняется появление буквы «н» в названиях лабораторных работ в настоящем издании.

Предназначено для студентов 1-го курса всех технических факультетов СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

УДК 531(07)

ББК В2я7

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Е. С. Сергиенко (СПбГУ).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7629-1986-9

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016

## Содержание

Общие рекомендации по подготовке и выполнению работ .....	4
Работа 1н. Измерение скорости пули с помощью баллистического маятника .....	5
Работа 2н. Неупругое соударение шаров.....	11
Работа 3н. Упругое столкновение шаров.....	16
Работа 4н. Определение коэффициента трения покоя .....	23
Работа 5н. Определение коэффициента трения скольжения .....	26
Работа 6н. Проверка законов динамики поступательного движения .....	30
Работа 7н. Скатывание тела с наклонной плоскости.....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	47
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ.....	49
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	50

## **ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ**

При подготовке к выполнению работы изучите введение, содержащее теоретические сведения, описание лабораторной установки и методов измерений. Прочтите раздел учебника [1], посвященный теме лабораторной работы.

Подготовка к лабораторной работе должна содержать оформленные на листах формата А4:

- титульный лист;
- цель работы, схему и краткое описание лабораторной установки и метода измерения, а также исследуемых закономерностей;
- бланк протокола наблюдений. Вносите в бланк протокола таблицы для записи результатов наблюдений и постоянных и однократно измеряемых в опыте величин. После окончания работы протокол обязательно должен быть подписан преподавателем.

При допуске к лабораторной работе преподаватель имеет право задать вопросы по теме лабораторной работы. Контрольные вопросы, приведенные в конце каждой работы, облегчают подготовку к допуску и защите работы.

При проведении экспериментов строго выполняйте все установленные в лаборатории правила техники безопасности.

Отчет о работе должен содержать:

- подготовку к лабораторной работе;
- расчетную часть, включающую основные формулы с примерами подстановки в них численных величин с указанием единиц измерения, таблицы обработки измерений, графики, расчет искомых величин и их погрешностей и вывод.

Проводите обработку результатов измерений и представляйте расчеты в табличном виде согласно учебному пособию [2].

В выводах кратко излагаются результаты работы: полученные экспериментально или теоретически значения физических величин, их зависимости от условий эксперимента или выбранной расчетной модели, описываются их соответствие или несоответствие физическим законам и теоретическим моделям, возможные причины несоответствия. Они могут содержать сопоставление экспериментальных и теоретических результатов, экспериментальных результатов, полученных различными способами, сопоставление полученных результатов с известными справочными или табличными данными, физическое объяснение полученной в опыте графической закономерности. В выводах принята безличная форма построения предложений.

Исправление работы в соответствии с замечаниями преподавателя необходимо делать на чистой оборотной стороне листа отчета. Недопустимо замазывание замечаний преподавателя в работе или устранение их путем полной перепечатки или переписывания текста.

В приложении приведены справочные материалы и список литературы, рекомендуемой для самостоятельной подготовки к выполнению лабораторных работ [1]–[3].

## Работа 1н. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** экспериментальная проверка закона сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе и определение с помощью баллистического маятника скоростей пуль с различными массами.

**Приборы и принадлежности.** Лабораторная установка (рис. 1.1) включает:

– баллистический маятник, представляющий собой массивный цилиндр массой  $M$ , подвешенный на невесомых и нерастяжимых нитях так, что он может двигаться только поступательно. Торцевая

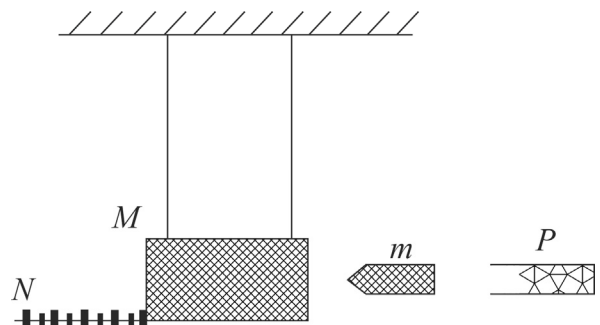


Рис. 1.1

стенка цилиндра изготовлена из мягкого и легко деформируемого материала (в данной работе это пластилин);

- набор трех пуль с разными массами  $m$ ;
- пружинный пистолет  $P$ ;
- проградуированную шкалу  $N$  для измерения горизонтального смещения маятника при попадании в него пули. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### Исследуемые закономерности

Абсолютно неупругим называют удар, при котором после столкновения тела движутся с одинаковыми скоростями в одном направлении (слипаются). В процессе неупругого удара механическая энергия не сохраняется, превращаясь частично во внутреннюю энергию столкнувшихся тел (тела нагреваются). Неупругое взаимодействие можно наблюдать, например, при столкно-

вении пластилиновых тел. В данном опыте исследуется абсолютно неупругий удар пуль массой  $m$ , попадающих в торцевую пластилиновую стенку массивного баллистического маятника массой  $M$ .

При любом типе столкновения тел должен выполняться закон сохранения энергии, а при их быстром столкновении – еще и закон сохранения импульса в системе сталкивающихся тел. Это следствие второго закона Ньютона в интегральной форме

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}_C = \int_0^t \mathbf{F} dt, \quad (1.1)$$

где  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$  и  $\Delta \mathbf{p}_C = \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_{C0}$  – изменения импульсов системы тел и ее центра масс; интеграл  $\int_0^t \mathbf{F} dt$  называется импульсом силы  $\mathbf{F}$  за время ее действия  $t$ .

Из (1.1) следует, что в быстрых процессах (взрыв, распад системы, столкновения тел), для которых интервал времени протекания процесса  $\Delta t = t \approx 0$ , импульс системы тел сохраняется:  $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \text{const}$  или  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = 0$ .

Система уравнений, описывающая абсолютно неупругий удар тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , с учетом законов сохранения импульса при их лобовом столкновении в проекциях на ось  $x$  (рис. 1.2) и энергии в системе сталкивающихся тел, имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $v_1, v_2$  и  $v$  – скорости тел до и после их столкновения.

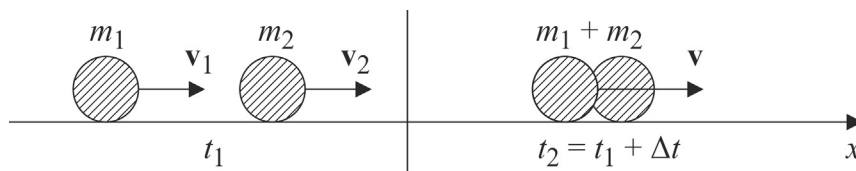


Рис. 1.2

Отсюда скорость тел после столкновения  $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ , а выделившееся при ударе тепло

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2,$$

где  $v_1, v_2$  и  $v$  – проекции скоростей тел  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}$  на направление оси  $x$ , имеющие знак  $(\pm)$ .

Если тело с массой  $m_2$  до столкновения покоилось ( $v_2 = 0$ ), то скорость тел после их столкновения и выделившееся при ударе тепло согласно (1.2) будут равны

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad Q = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Переобозначив  $m_1$  и  $m_2$  как  $m$  и  $M$ , а  $v_1$  и  $v$  соответственно как  $v$  и  $u$ , получим для скорости  $u$  баллистического маятника после удара о него пули, движущейся со скоростью  $v$ , и выделившегося при ударе тепла  $Q$ :

$$u = \frac{mv}{m + M}, \quad Q = \frac{mMv^2}{2(m + M)}. \quad (1.3)$$

Пуля выпускается заряженным пружинным пистолетом. При сжатии пружины с жесткостью  $k$  на величину длины пули  $b$  (длина части пули большего диаметра) в ней будет запасена потенциальная энергия  $W_p = \frac{kb^2}{2}$ , которая при выстреле пистолета перейдет в кинетическую энергию пули  $\frac{kb^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ . Отсюда скорость пули после выстрела

$$v = b\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{или} \quad y = ax, \quad (1.4)$$

где обозначены:  $y = v$ ,  $a = b\sqrt{k}$ ,  $x = \sqrt{1/m}$ . Отсюда следует, что скорость  $v$  вылета пули из пистолета является линейной функцией от величины  $\sqrt{1/m}$  и представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат.

После попадания пули в маятник он начинает двигаться со скоростью  $u$  и поднимается на нитях, на которых он подвешен, на высоту  $h$  (рис. 1.3). Эту высоту можно найти из закона сохранения энергии, который с учетом (1.3) имеет вид:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)} = (M + m)gh.$$

Отсюда скорость пули при вылете из пистолета

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (1.5)$$

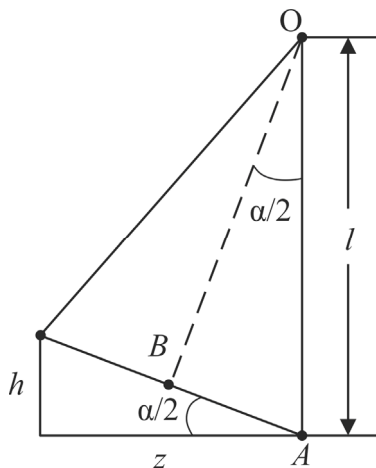


Рис. 1.3

Практическое измерение высоты  $h$  подъема маятника затруднительно, но ее можно выразить через горизонтальное смещение маятника  $z$ .

Полагая угол  $\alpha$  отклонения маятника после удара пули малым, получим согласно рис. 1.3:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BO} = \frac{h}{z} \approx \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{AO} \approx \frac{z/2}{l} = \frac{z}{2l}, \quad (1.6)$$

где  $l$  – длина нитей подвеса маятника. Из (1.6) получим  $h = z^2/2l$ . Тогда согласно (1.5) скорость пули после выстрела

$$v = \left( \frac{M + m}{m} \right) z \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Измерив скорости пуль с разными массами, можно убедиться в справедливости теоретической зависимости (1.4).

Если скорости пуль  $v$  определены экспериментально, то по закону сохранения энергии  $\frac{kb^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$  можно найти жесткость пружины  $k = \frac{mv^2}{b^2}$ , где  $m$  – масса пули,  $b$  – деформация пружины. Жесткость является физической константой, характеризующей материал пружины. Поэтому если опыт дает правильные значения скоростей пуль, то мы должны получить три близких расчетных значения жесткости  $k$ . Это также может служить проверкой соответствия между теорией и экспериментом.

### Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (по форме табл. 1.1 и 1.2) для записи параметров установки и результатов наблюдений.

### Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Удар», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение на себя.
3. Зарядите пистолет пулей с наибольшей массой.
4. Подготовьте устройство  $N$  (рис. 1.1) к измерению горизонтального смещения маятника. Запишите в табл. 1.1 численное значение начальной координаты  $z_{\text{нач}} = z_1$  маятника по линейке отсчетного устройства  $N$ .



Таблица 1.1

Экспериментальные данные  $(x, y)$  для определения коэффициента  $a$  в зависимости  $y = ax$

при  $N = 3$ ,  $P = 95\%$ ,  $t_{P,N} = 4.3$ ,  $\beta_{P,N} = 1.30$ ,  $\theta_m = 0.2$  Г,  $\theta_z = \theta_l = \theta_b = 0.1$  см

$m$	$N_0$	$z_1$	$z_2$	$z =  z_2 - z_1 $	$\bar{z}$	$y = v = \left(\frac{M+m}{m}\right) \bar{z} \sqrt{\frac{g}{L}}$	$\theta_y = y \left(\frac{\theta_m}{m} + \frac{\theta_z}{\bar{z}} + \frac{\theta_L}{2L}\right)$	$x = \sqrt{\frac{1}{m}}$	$\theta_x = \frac{\theta_m}{2m^{3/2}}$	$k = \frac{my^2}{b^2} = \frac{my^2}{b^2}$	$\theta_k = k \left(\frac{\theta_m}{m} + \frac{2\theta_b}{b} + \frac{2\theta_y}{y}\right)$
$m_1$	1										
	...										
	3										
...	...										
$m_3$	1										
	...										
	3										

Таблица 1.2

Константы эксперимента

$m_1, \Gamma$	$m_2, \Gamma$	$m_3, \Gamma$	$M, \Gamma$	$g, \text{м/с}^2$	$l, \text{см}$	$b, \text{см}$
$21.1 \pm 0.2$	$14.2 \pm 0.2$	$6.7 \pm 0.1$	См. на установке	$9.80 \pm 0.05$	См. на установке	$3.0 \pm 0.1$

5. Осуществите первый выстрел, нажав пусковой рычаг пружинного пистолета. Запишите численное значение конечной координаты  $z_{\text{кон}} = z_2$  смещения маятника, определив его по линейке отсчетного устройства  $N$ . Вычислите смещение маятника при первом опыте:  $z = |z_2 - z_1|$ , занесите его в табл. 1.1. Опыт повторите три раза.

6. Проведите измерения (п. 3–5) смещения маятника для пуль с другой массой в порядке ее убывания и занесите их в табл. 1.1.

7. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежность к работе в пластмассовый контейнер для нее.

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулы приборных погрешностей  $\theta_y, \theta_x$  и  $\theta_k$  в табл. 1.1 и полной погрешности  $\Delta \bar{k}$  (см. п. 4).

2. Заполните табл. 1.1 и нанесите точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  на координатную плоскость на миллиметровой бумаге.

3. Пользуясь табл. П.5 в приложении, рассчитайте по методу наименьших квадратов (МНК) коэффициент  $a = \bar{a} \pm \Delta \bar{a}$  в зависимости  $y = ax$  (1.4) для  $N = 3$  и  $P = 95\%$ . Нанесите прямую МНК на координатную плоскость (п. 2). Она должна проходить через точки  $(0, 0)$  и  $(x_i, \bar{a}x_i)$ , где  $x_i$  – произвольное значение параметра  $x$ .

4. По известным значениям параметра  $\bar{a}$  и деформации  $b$  пружины пистолета (табл. 1.2) определите методом переноса погрешностей ее жесткость

$$\bar{k} = (\bar{a}/b)^2, \quad \Delta \bar{k} = \bar{k} \sqrt{\left(\frac{2\Delta \bar{a}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta \bar{b}}{\bar{b}}\right)^2}, \quad k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k}, \quad N = 3, P = 95\%.$$

Сопоставьте расположение точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , полученное в п. 2 относительно этой прямой.

5. По последним двум столбцам табл. 1.1 рассчитайте выборочным методом по стандартной таблице обработки данных жесткость пружины  $k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k}$  для  $N = 3, P = 95\%$ . Убедитесь, что значения  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в таблице близки друг к другу. Для простоты случайную погрешность функции рассчитывайте по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P,N} R_x$ .

6. Сопоставьте значения жесткости  $k$ , рассчитанные в п. 4 и 5. В каком методе обработки данных (МНК и выборочный) погрешность результата из-

мерения  $\overline{\Delta k}$  больше? *Замечание:* два значения физической величины считаются статистически неразличимыми, если среднее значение одного из них попадает в доверительный интервал другого. Если это условие не выполняется, то в опыте присутствует не выявленная систематическая погрешность, и факторы, приводящие к ней, экспериментатор должен выявить. Либо следует сделать заключение об отсутствии соответствия между теорией и опытом.

7. По данным расчетов в п. 2–4 сделайте заключение о соответствии теории и опыта.

8. Вычислите тепло  $Q$  (1.3), выделившееся при неупругом столкновении тел в данной работе, для пули с большей массой.

### Контрольные вопросы

1. Какой маятник называют баллистическим? Можно ли его рассматривать как математический маятник и почему? По какой формуле рассчитывается период колебаний математического маятника?

2. Если маятник считать математическим, то за какое время после удара пули он отклонится на максимальный угол?

3. Дайте определения импульса тела, его кинетической и потенциальной энергии. Каков их физический смысл?

4. Сформулируйте второй закон Ньютона в дифференциальной и интегральной форме.

5. Какая система тел называется замкнутой и замкнутой в направлении оси  $x$ ?

6. Когда выполняется закон сохранения импульса в системе тел?

7. Дайте определение центра масс системы тел.

8. Покажите, что импульс системы тел совпадает с импульсом ее центра масс.

9. Какие виды соударений тел существуют? Какой удар называют абсолютно неупругим?

10. Какой системой уравнений описывается абсолютно неупругий удар? Используя эти уравнения, выведите формулы (1.3).

### Работа 2н. НЕУПРУГОЕ СОУДАРЕНИЕ ШАРОВ

**Цель работы:** экспериментальная проверка законов сохранения импульса и энергии при абсолютно неупругом столкновении шаров, подвешенных на бифилярных подвесах, по углу их совместного отклонения после столкновения.

**Приборы и принадлежности.** Лабораторная установка для изучения неупругого удара (рис. 2.1) представляет собой два стальных шара с массами  $m_1$  и  $m_2$  (на боковой поверхности шара  $m_2$  в точке столкновения нанесен пластилин), закрепленных на бифилярных подвесах 3. Длины бифилярных

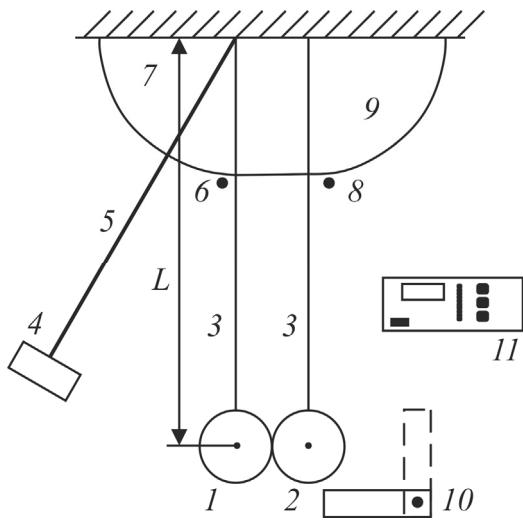


Рис. 2.1

подвесов от оси их подвеса до центров масс шаров одинаковы и равны  $L$ . Шар  $m_1$  может удерживаться в отклоненном положении электромагнитом 4. Положение электромагнита может изменяться за счет поворота штанги 5.

Начальный угол отклонения подвеса шара  $m_1$  от вертикального положения определяется с помощью поворотного индикатора 6 и шкалы 7. Поворотный индикатор 8 со шкалой 9 позволяет определить

угол совместного отклонения бифилярных подвесов слипшихся шаров после удара. Устройство 10 позволяет предотвратить отклонение шаров после соударения, если это необходимо. Управление электромагнитом осуществляется с помощью блока 11. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### Исследуемые закономерности

Исследуемые закономерности абсолютно неупругого соударения тел описаны в работе 1н.

Если шар  $m_2$  до столкновения покоился ( $v_2 = 0$ ), то скорость шаров после их столкновения и выделившееся при ударе тепло будут равны

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad Q = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (2.1)$$

В данной работе в опыте измеряются не скорости шаров, а углы отклонения  $\alpha_0$  и  $\alpha$  подвесов, на которых шары подвешены, до и после удара.

Если шар  $m_1$  до столкновения был отклонен от положения равновесия на угол  $\alpha_0$ , то он относительно своего начального положения поднимется на высоту  $h_0 = L(1 - \cos \alpha_0)$ , где  $L$  – расстояние от оси вращения подвесов до центра масс шара.

Согласно закону сохранения энергии  $m_1gh_0 = m_1v_1^2/2$  шар  $m_1$  перед столкновением с покоящимся шаром  $m_2$  будет иметь скорость

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_0)}.$$

После столкновения шаров их подвесы отклонятся на угол  $\alpha$  и шары поднимутся на высоту  $h = L(1 - \cos \alpha)$ .

А их скорость после столкновения согласно закону сохранения энергии будет равна

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}.$$

Подставляя полученные выражения для скоростей  $v_1$  и  $v$  в первую формулу (2.1), получим формулу для косинуса угла отклонения подвесов после неупругого удара:

$$\cos \alpha = 1 - \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 (1 - \cos \alpha_0). \quad (2.2)$$

### **Указания по подготовке к работе**

Создайте таблицы (по форме табл. 2.1 и 2.2) для записи параметров установки и результатов наблюдений.

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Переведите установку в режим «Удар», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение на себя.

2. Убедитесь, что в качестве шара  $m_1$  (на левом подвесе) используется шар меньшей массы, а в точке столкновения шаров на большем шаре  $m_2$  нанесен пластилин.

3. Включите электронный блок управления электромагнитом 11 (рис. 2.1).

4. Подведите к электромагниту 4 шар  $m_1$  и убедитесь, что он удерживается им. Установите поворотом штанги 5 начальный угол  $\alpha_0 = 20^\circ$  отклонения подвеса шара  $m_1$ . Пользуясь поворотным индикатором 6 и шкалой 7 (рис. 2.1), измерьте этот угол и занесите в табл. 2.1.

5. Подготовьте поворотный индикатор 8 к измерению угла отклонения  $\alpha$  подвесов шаров после неупругого удара. Для этого установите его в положение, близкое к  $0^\circ$ .

Таблица 2.1

Определение угла отклонения  $\alpha$  шаров, подвешенных на бифилярных подвесах, после их абсолютно неупругого столкновения при  $N = 3$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 1.3$ ,  $\theta_\alpha = 2.5^\circ$

$\alpha_0$	№	$x_0 = \cos \alpha_0$	$\theta_{x_0} = \sin \alpha_0 \theta_\alpha$	$y = 1 - \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 (1 - x_0)$	$\theta_y = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \theta_{x_0}$	$\alpha$	$x = \cos \alpha$	$\theta_x = \sin \alpha \theta_\alpha$
20°	1							
	...							
	3							
...	...							
	1							
	...							
60°	...							
	3							

Таблица 2.2

Константы эксперимента

$m_1, \Gamma$	$m_2, \Gamma$	$L, \text{см}$
$45 \pm 1$	$131 \pm 1$	$23.9 \pm 0.1$

6. Нажатием кнопки «Пуск» на электронном блоке отключите питание электромагнита и освободите шар  $m_1$ .

7. Снимите показания со шкалы  $\vartheta$  и запишите значение угла отклонения  $\alpha$  подвесов шаров после их столкновения в табл. 2.1. Повторите опыт по определению угла отклонения  $\alpha$  для данного значения  $\alpha_0$  три раза.

8. Повторите опыт (п. 3–6) пять раз, изменяя угол  $\alpha_0$  с шагом  $10^\circ$  и занося измеренные значения углов  $\alpha_0$  и  $\alpha$  в табл. 2.1.

9. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в контейнер для нее.

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулы приборных погрешностей  $\theta_x$  и  $\theta_y$  в табл. 2.1.

2. Заполните табл. 2.1 и рассчитайте выборочным методом по табл. П.4 в приложении значения параметров  $x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x}$  для  $N = 3$  и  $P = 95\%$  для каждого угла отклонения  $\alpha_0$ . Для простоты случайную погрешность  $\Delta x = \beta_{P,N} R_x$  рассчитывайте по размаху выборки.

3. Постройте по табл. 2.1 зависимость  $y = y(x_0)$  на координатной плоскости  $XOY$  и нанесите на нее экспериментальные точки  $\bar{x}_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, 5$  – номер угла отклонения  $\alpha_0$  маленького шара перед столкновением.

4. Проверьте выполнение условия  $\bar{x}_i \cong y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). Сделайте соответствующее заключение о выполнимости закона сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе тел. *Замечание:* два значения физической величины считаются статистически неразличимыми, если среднее (истинное) значение одного из них попадает в доверительный интервал другого. Если это условие не выполняется, то в опыте присутствует не выявленная систематическая погрешность, и факторы, приводящие к ней, экспериментатор должен выявить. Либо следует сделать заключение о несоответствии теории и опыта.

5. Рассчитайте для максимального угла отклонения  $\alpha_0$  малого шара его скорость  $v_1$  перед столкновением с большим шаром и скорость  $v$  слипшихся шаров после столкновения.

### Контрольные вопросы

1. Какой маятник называют математическим? Можно ли шары на подвесах в данной работе рассматривать как математические маятники и почему? По какой формуле рассчитывается период колебаний математического маятника?

2. Дайте определения импульса, кинетической и потенциальной энергии тела. Каков их физический смысл?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона в дифференциальной и интегральной форме.
4. Когда выполняется закон сохранения импульса в системе тел?
5. Дайте определение центра масс системы тел.
6. Покажите, что импульс системы тел совпадает с импульсом ее центра масс.
7. Какие виды соударений тел существуют? Какой удар называют абсолютно неупругим?
8. Какой системой уравнений описывается абсолютно неупругий удар? Докажите формулу (2.2).

### Работа 3н. УПРУГОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ ШАРОВ

**Цель работы:** экспериментальная проверка законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом столкновении стальных шаров, подвешенных на бифилярных подвесах, по углу отклонения подвесов после столкновения шаров.

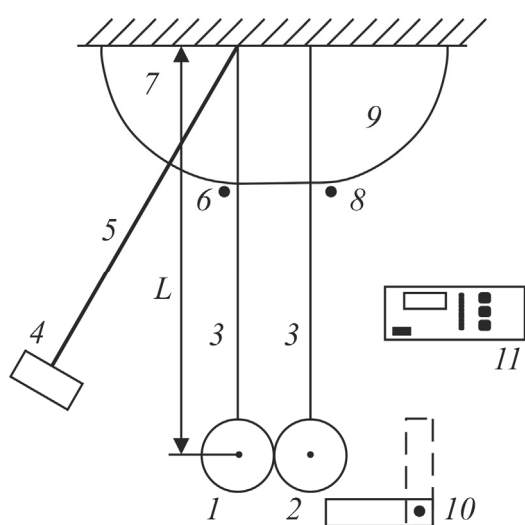


Рис. 3.1

**Приборы и принадлежности.** Лабораторная установка для изучения упругого удара (рис. 3.1) представляет собой два стальных шара с массами  $m_1$  и  $m_2$ , закрепленных на бифилярных подвесах 3. Длины бифилярных подвесов от оси их подвеса до центров масс шаров одинаковы и равны  $L$ . Шар  $m_1$  может удерживаться в отклоненном положении электромагнитом 4. Положение электромагнита может изменяться за счет поворота штанги 5.

Начальный угол отклонения подвеса шара  $m_1$  от вертикального положения определяется с помощью поворотного индикатора 6 и шкалы 7. Этот же индикатор позволяет определить максимальный угол отклонения шара  $m_1$  после удара. Максимальный угол отклонения шара  $m_2$  измеряется с помощью второго поворотного индикатора 8 со шкалой 9. Устройство 10 позволяет предотвратить отклонение шара  $m_2$  после столкновения с шаром  $m_1$ , если это необходимо. Управление электромагнитом осуществляется с помощью блока 11 СЭ-1.



## Исследуемые закономерности

Абсолютно упругим называется удар, при котором не происходит превращение механической энергии соударяющихся тел в другие виды энергии. В частности, не наблюдается нагревание тел при ударе. При абсолютно упругом ударе деформация тел, возникающая в момент удара, после его завершения полностью исчезает. Очень близким к упругому является удар стальных шаров.

Исследуемые закономерности частично описаны в работе 1н.

Система уравнений, описывающая абсолютно упругий удар шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 3.2), с учетом законов сохранения импульса при их лобовом столкновении в проекциях на ось  $x$  и энергии в системе сталкивающихся тел, имеет вид:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \quad (3.1)$$

где  $v_i$  и  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) – скорости тел до и после их столкновения.

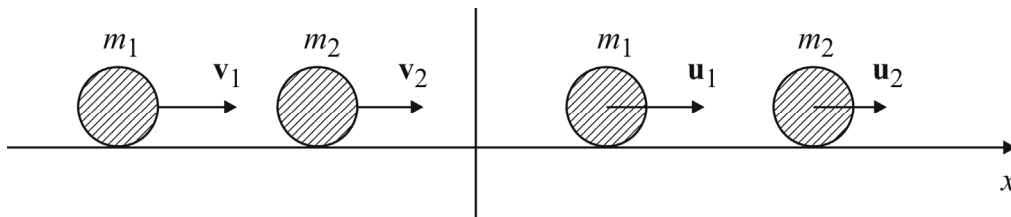


Рис. 3.2

Систему уравнений (3.1) можно свести к линейной:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2, \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (3.2)$$

Для получения первого уравнения в (3.2) необходимо в (3.1) члены с одинаковыми индексами 1 и 2 перенести в одну часть равенства, а затем разделить одно уравнение на другое.

Решая систему (3.2), получим

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.3)$$

В этих уравнениях  $v_1, v_2$  и  $u_1, u_2$  – это проекции скоростей тел на выбранное направление оси проецирования  $x$ , имеющие знак ( $\pm$ ). Если при расчетах будет получено  $u_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ), это означает, что вектор скорости тела  $\mathbf{u}_i$  после столкновения тел направлен противоположно выбранному направлению оси  $x$ .

Если шар  $m_2$  до столкновения покоился ( $v_2 = 0$ ), то скорости тел после столкновения согласно (3.3) будут равны

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует: если сталкивающиеся шары имеют одинаковую массу ( $m_1 = m_2$ ), то налетающий шар после столкновения остановится ( $u_1 = 0$ ), а покоящийся приобретет скорость налетающего ( $u_2 = v_1$ ). Если масса налетающего шара меньше покоящегося ( $m_1 < m_2$ ), то после столкновения налетающий шар отскочит назад ( $u_1 < 0$ ).

Шары на бифилярных подвесах одинаковой длины можно рассматривать как математические маятники с одинаковым периодом колебания, поэтому они вернутся в исходную точку столкновения на вертикали с некоторой высоты через одинаковое время (через половину периода колебаний) и перед последующим вторым столкновением по закону сохранения механической энергии будут иметь такие же скорости, как в (3.4).

Переобозначив в (3.4)  $u_1$  и  $u_2$  как  $v_1$  и  $v_2$  и подставив эти выражения в (3.3), получим для скоростей тел после их второго столкновения:

$$u_1 = \left( \frac{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right) v_1 = v_1,$$

$$u_2 = \left( \frac{2m_1(m_2 - m_1) + 2m_1(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \right) v_1 = 0.$$

То есть шары после второго столкновения будут иметь такие же скорости, что и до первого столкновения.

Величинами, которые будут измеряться в опыте, являются не скорости, а углы отклонения подвесов шаров от положения равновесия.

Пусть подвес первого шара отклонен на угол  $\alpha_0$ , тогда он поднимется от положения равновесия на высоту

$$h_0 = L(1 - \cos \alpha_0),$$

где  $L$  – расстояние от оси вращения шара до его центра масс.

Согласно закону сохранения энергии  $m_1gh_0 = m_1v_1^2/2$  шар  $m_1$  перед столкновением с покоящимся шаром  $m_2$  будет иметь скорость

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_0)}$$

и после столкновения с шаром  $m_2$  с учетом (3.4) приобретет скорость

$$u_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_0)}, \quad (3.5)$$

а при отклонении подвеса на угол  $\alpha_1$  после столкновения поднимется на высоту

$$h_1 = L(1 - \cos \alpha_1).$$

Из закона сохранения энергии  $m_1gh_1 = m_1u_1^2/2$  с учетом (3.5) следует:

$$2gL(1 - \cos \alpha_1) = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 2gL(1 - \cos \alpha_0).$$

Отсюда получим для косинуса угла отклонения  $\alpha_1$  подвеса шара  $m_1$  после столкновения

$$\cos \alpha_1 = 1 - \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 (1 - \cos \alpha_0). \quad (3.6)$$

Рассуждая подобным же образом, получим для косинуса угла отклонения  $\alpha_2$  подвеса шара  $m_2$  после столкновения

$$\cos \alpha_2 = 1 - \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 (1 - \cos \alpha_0). \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что связь между косинусами углов отклонения шаров после упругого удара такова:

$$\cos \alpha_1 = 1 - \left( \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \right)^2 (1 - \cos \alpha_2),$$

$$\cos \alpha_2 = 1 - \left( \frac{2m_1}{m_1 - m_2} \right)^2 (1 - \cos \alpha_1).$$

После столкновения шаров начальная потенциальная энергия шара  $m_1$  перейдет в потенциальные энергии шаров  $m_1$  и  $m_2$ :

$$m_1gh_0 = m_1gh_1 + m_2gh_2.$$

$$\text{Откуда } m_1(1 - \cos \alpha_0) = m_1(1 - \cos \alpha_1) + m_2(1 - \cos \alpha_2).$$

Далее приходим к уравнению связи:

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 - \frac{m_2}{m_1} (1 - \cos \alpha_2).$$

Найдем, при каком соотношении масс  $x = m_2/m_1$  сталкивающихся шаров углы их отклонения после столкновения будут одинаковыми. Полагая в (3.6) и (3.7)  $\alpha_1 = \alpha_2$ , приходим к квадратному уравнению  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , откуда  $x = m_2/m_1 = 3$ .

### Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (по форме табл. 3.1 и 3.2) для записи параметров установки и результатов наблюдений.

### Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав на СЭ-1 кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Удар», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение на себя.
3. Убедитесь, что в качестве шара  $m_1$  (на левом подвесе) используется шар меньшей массы.
4. Подведите к электромагниту 4 шар  $m_1$  и убедитесь, что он удерживается им. Для этого на СЭ-1 должна быть нажата кнопка «Стоп». Установите поворотом штанги 5 начальный угол  $\alpha_0$  отклонения подвеса шара  $m_1$ . Пользуясь поворотным индикатором 6 и шкалой 7 (рис. 3.1), измерьте этот угол и занесите в табл. 3.1.
5. Подготовьте поворотный индикатор 8 к измерению угла отклонения  $\alpha_2$  подвеса шара  $m_2$ . Для этого установите его в положение, близкое к  $0^\circ$ .
6. Нажатием кнопки «Пуск» на электронном блоке СЭ-1 отключите питание электромагнита и освободите шар  $m_1$ .
7. Снимите показания со шкалы 9 и запишите полученное значение угла отклонения  $\alpha_2$  подвеса шара  $m_2$  после первого удара в табл. 3.1.
8. Нажатием кнопки «Стоп» включите питание электромагнита и вновь подведите к нему шар  $m_1$ . Повторите опыт (п. 6–7) пять раз.
9. Верните на место шар малой массы  $m_1$ , отклонив его подвес на угол  $\alpha_0$ . Проведите качественный опыт с целью наблюдения особенностей второго упругого удара. Убедитесь, что шар большей массы  $m_2$  после второго удара останавливается, а шар  $m_1$  отклоняется почти на первоначальный угол  $\alpha_0$ .
10. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе (если таковые имеются) в контейнер для нее.

Таблица 3.1

Проверка соответствия теоретическим значениям углов отклонения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  шаров, подвешенных на бифилярных подвесах, после их абсолютно упругого столкновения при  $N = 5$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 0.51$ ,  $\theta_\alpha = 2.5^\circ$

$N_0$	$\alpha_0$	$\alpha_2$	$x_0 = \cos \alpha_0$	$\theta_{x_0} = \sin \alpha_0 \theta_\alpha$	$x_2 = \cos \alpha_2$	$\theta_{x_2} = \sin \alpha_2 \theta_\alpha$	$y_2 = 1 - \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \times (1 - x_0)$	$\theta_{y_2} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \times \theta_{x_0}$	$y_1 = 1 - \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \times (1 - x_0)$	$\theta_{y_1} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \times \theta_{x_0}$	$y'_1 = 1 - \left( \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \right)^2 \times (1 - x_2)$	$\theta_{y'_1} = \left( \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \right)^2 \times \theta_{x_2}$
1												
...												
5												

Таблица 3.2

Константы эксперимента

$m_1, \Gamma$	$m_2, \Gamma$	$L, \text{см}$
$45 \pm 1$	$131 \pm 1$	$23.9 \pm 0.1$

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулы приборных погрешностей  $\theta_{x_2}$  и  $\theta_{y_1}$  в табл. 3.1.
2. Заполните табл. 3.1 и рассчитайте выборочным методом по табл. П.4 в приложении значения параметров  $x_2 = \overline{x_2} \pm \overline{\Delta x_2}$ ,  $y_2 = \overline{y_2} \pm \overline{\Delta y_2}$ ,  $y_1 = \overline{y_1} \pm \overline{\Delta y_1}$  и для  $N = 5$  и  $P = 95\%$ . Для простоты случайную погрешность функции рассчитывайте по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P,N} R_x$ .
3. Проверьте выполнение условий  $\overline{x_2} \approx \overline{y_2}$  и  $\overline{y_1} \approx \overline{y_1'}$  ( $y_1 = \cos \alpha_1$ ). Сделайте заключение о выполнимости законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом ударе тел. *Замечание:* два значения физической величины считаются статистически неразличимыми, если среднее (истинное) значение одного из них попадает в доверительный интервал другого. Если это условие не выполняется, то в опыте присутствует не выявленная систематическая погрешность, и факторы, приводящие к ней, экспериментатор должен выявить. Либо следует сделать заключение об отсутствии соответствия между теорией и опытом.
4. Проверьте выполнение соотношения  $\overline{y_1} = \cos \alpha_1 \cong \cos \alpha_2 = \overline{y_2}$  и сделайте заключение о соотношении масс сталкивающихся шаров ( $m_2/m_1 \cong 3$ ).
5. Рассчитайте для максимального угла отклонения  $\alpha_0$  малого шара его скорость  $v_1$  перед столкновением с большим шаром и скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после их столкновения.

### Контрольные вопросы

1. Какой маятник называют математическим? Можно ли шары на подвесах в данной работе рассматривать как математические маятники и почему? По какой формуле рассчитывается период колебаний математического маятника?
2. Через какое время после столкновения шары поднимутся до своей максимальной высоты и вернуться в исходную точку их столкновения?
3. Дайте определения импульса тела, его кинетической и потенциальной энергии. Каков их физический смысл?
4. Сформулируйте второй закон Ньютона в дифференциальной и интегральной форме.
5. Когда выполняется закон сохранения импульса в системе тел?
6. Дайте определение центра масс системы тел.

7. Покажите, что импульс системы тел совпадает с импульсом ее центра масс.

8. Какие виды соударений тел существуют? Какой удар называют абсолютно упругим?

9. Какой системой уравнений описывается абсолютно упругий удар? Как ее свести к линейной?

10. Докажите формулу (3.7).

#### Работа 4н. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ПОКОЯ

**Цель работы:** определение коэффициента трения покоя между телом и поверхностью наклонной плоскости.

**Приборы и принадлежности.** Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 4.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен брусок 4 массой  $m$ , состоящий из двух частей, изготовленных из разных материалов: дерево и дюралюминий. Изменяя угол наклона плоскости, можно найти такой угол, при котором брусок скачком сдвинется с места и начнет скользить по плоскости. По этому углу можно рассчитать коэффициент трения покоя бруска.

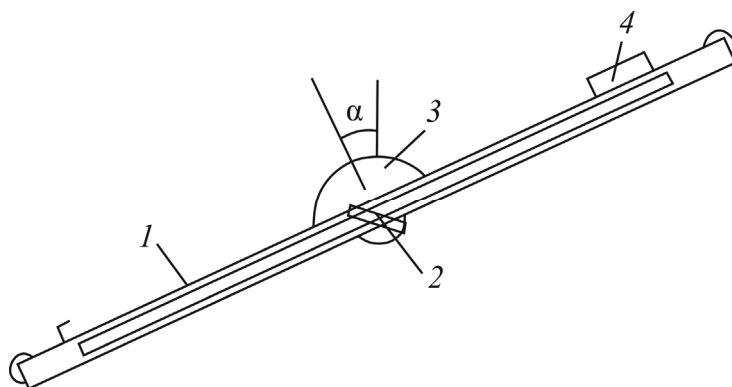


Рис. 4.1

Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

#### Исследуемые закономерности

*Внешним трением* называется взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их взаимному перемещению. Если трение проявляется между частями одного и того же тела, оно называется *внутренним трением*.

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел называют *сухим трением*. Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется *жидким* или *вязким трением*.

В случае сухого трения, если соприкасающиеся тела неподвижны относительно друг друга, говорят о *трении покоя*; при относительном перемещении говорят о *трении скольжения*. В случае, когда одно из тел катится по поверхности другого без проскальзывания, говорят о *трении качения*.

Трение – неизбежное следствие молекулярной структуры твердых тел и обусловлено переходом кинетической энергии в тепло при последовательном образовании и разрыве молекулярных связей в зонах микроконтактов.

Во всех видах трения возникает сила трения  $F_{\text{тр}}$ , направленная вдоль поверхностей соприкасающихся тел противоположно скорости их относительного перемещения.

В данной работе рассматривается экспериментальное определение силы трения покоя  $F_{\text{тр}0}$ , которая не является однозначно определяемой величиной. Если к телу, находящемуся в соприкосновении с другим телом, прикладывать возрастающую внешнюю силу  $F$ , параллельную плоскости соприкосновения, то при изменении  $F$  от нуля до некоторого значения движения тела не возникает. При этом сила трения изменяется от нуля до предельного значения  $F_{\text{тр}0}^{\text{макс}}$ . Относительное движение возникает при  $F > F_{\text{тр}0}^{\text{макс}}$ . Обычно, говоря о силе трения покоя, имеют в виду максимальную силу трения покоя  $F_{\text{тр}0}^{\text{макс}}$ .

Сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и пропорциональна силе нормального давления, а следовательно, равной ей силе реакции опоры  $N$ :  $F_{\text{тр}0}^{\text{макс}} = \mu_0 N$ . Величина  $\mu_0$  называется коэффициентом трения покоя. Коэффициент трения покоя зависит от свойств трущихся материалов и от качества обработки поверхностей.

Для определения коэффициента трения покоя удобно использовать наклонную плоскость (рис. 4.1). При медленном увеличении угла наклона плоскости можно найти такой угол  $\alpha$ , при котором брусок скачкообразно сдвинется с места и начнет скользить по плоскости.



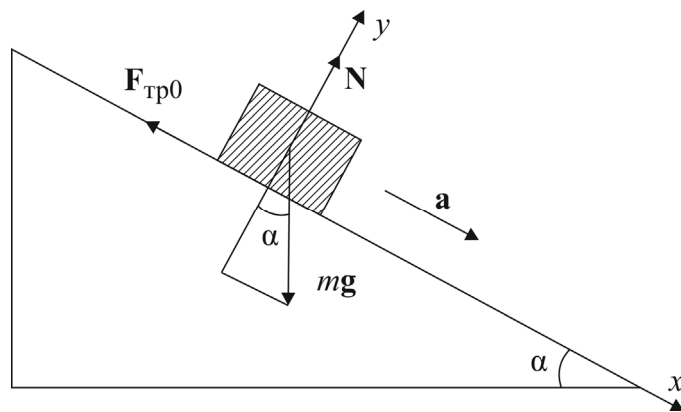


Рис. 4.2

В данном случае на брусок действуют три силы (рис. 4.2): сила тяжести  $mg$ , реакция опоры  $N$  и сила трения покоя  $F_{\text{тр}0}$ . Условия равновесия тела вдоль осей  $x$  и  $y$  на рис. 4.2 имеют вид:  $F_{\text{тр}0} = mg \sin \alpha$  и  $N = mg \cos \alpha$ , откуда

$$\mu_0 = \frac{F_{\text{тр}0}}{N} = \text{tg } \alpha.$$

### Указания по подготовке к работе

Создайте две таблицы (по форме табл. 4.1) для записи результатов наблюдений с целью определения коэффициентов трения покоя между поверхностями дерево–дерево ( $i = 1, \mu_1$ ) и дерево–дюралюминий ( $i = 2, \mu_2$ ).

Таблица 4.1

**Определение коэффициента трения покоя между поверхностями  
дерево–дерево ( $i = 1, \mu_1$ ) и дерево–дюралюминий ( $i = 2, \mu_2$ )  
при  $N = 5, P = 95 \%, \beta_{P,N} = 0.51, \theta_\alpha = 2.5^\circ$**

№	$\alpha_i$	$\bar{\alpha}_i$	$\Delta\alpha_i = \beta_{P,N} R_{\alpha i}$	$\overline{\Delta\alpha}_i = \sqrt{\Delta\alpha_i^2 + \theta_\alpha^2}$	$\bar{\mu}_i = \text{tg } \bar{\alpha}_i$	$\overline{\Delta\mu}_i = \frac{\overline{\Delta\alpha}_i}{\cos^2 \bar{\alpha}_i}$	$\mu_i = \bar{\mu}_i \pm \overline{\Delta\mu}_i$
1							
...							
5							

### Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя.
3. Ослабив винт 2 (рис. 4.1), установите плоскость под углом  $\alpha = 0^\circ$  к горизонту. Поместите брусок 4 (дерево–дюралюминий) деревянной стороной вниз на левую часть наклонной плоскости, где нет удерживающего брусок магнита.

4. Медленно изменяя угол наклона плоскости, найдите такой угол, при котором брусок скачком сдвинется и начнет скользить по плоскости. Запишите значение этого угла наклона плоскости для случая дерево–дерево в графу  $\alpha_1$  первой таблицы по форме табл. 4.1. Повторите опыт пять раз.

5. Повторите опыт (п. 3, 4), повернув брусок дюралюминиевой поверхностью вниз. Результаты измерений для случая дерево–дюралюминий занесите в графу  $\alpha_2$  второй таблицы по форме табл. 4.1.

6. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в контейнер для нее.

### **Задания по обработке результатов эксперимента**

1. Докажите формулу полной погрешности  $\overline{\Delta\mu}$  в табл. 4.1.

2. Заполните две таблицы по форме табл. 4.1 и рассчитайте значения коэффициентов трения  $\mu_i = \bar{\mu}_i \pm \Delta\bar{\mu}_i$  ( $i = 1, 2$ ) для  $N = 5$  и  $P = 95\%$  для случаев дерево–дерево и дерево–дюралюминий.

3. Сравните полученные в опыте значения коэффициентов трения покоя с табличными и с результатами измерения коэффициента трения скольжения.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое внешнее, внутреннее, сухое и вязкое трение?
2. Какова классификация видов сухого трения и какова его физическая природа?
3. Что такое трение покоя и как коэффициент трения покоя определяется в данной работе?

## **Работа 5н. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ**

**Цель работы:** проверка выполнимости второго закона Ньютона и определение на его основе коэффициента трения скольжения при скатывании тела с наклонной плоскости.

**Приборы и принадлежности.** Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 5.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен брусок 4 массой  $m$ . Брусок состоит из двух частей, изготовленных из разных материалов: дерево и дюралюми-

ний. Он закрепляется в верхней части наклонной плоскости с помощью электромагнита 5, управление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии кнопки «Пуск» на СЭ-1 магнит отключается и включается секундомер, при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

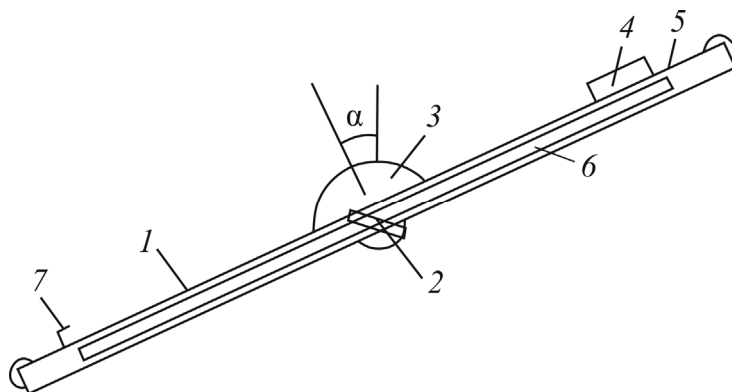


Рис. 5.1

Пройденное бруском расстояние измеряется линейкой 6, закрепленной вдоль плоскости. Время соскальзывания бруска измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания бруском финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### Исследуемые закономерности

При соскальзывании бруска с наклонной плоскости на него действуют несколько сил: сила тяжести  $mg$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и сила трения скольжения  $F_{тр}$  (рис. 5.2).

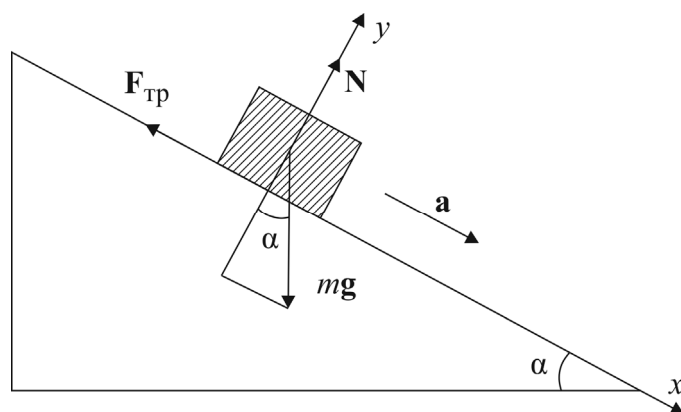


Рис. 5.2

Для описания движения тела вдоль наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  выберем ось  $x$  параллельно плоскости, а ось  $y$  перпендикулярно к ней. Действующая на тело сила трения скольжения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha .$$

Тогда второй закон Ньютона в проекциях на ось  $x$  будет иметь вид:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = ma ,$$

где  $a$  – ускорение.

Отсюда коэффициент трения скольжения  $\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{g \cos \alpha}$ .

Величину ускорения  $a$  можно найти, измерив пройденный бруском путь  $S$  и соответствующее время  $t$ :  $a = 2S/t^2$ . Тогда

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2S}{gt^2 \cos \alpha} .$$

### **Указания по подготовке к работе**

Создайте таблицы (по форме табл. 5.1 и 5.2) для записи параметров установки и результатов наблюдений. Таблиц по форме 5.1 должно быть две: одна для определения коэффициента трения между поверхностями дерево–дерево, а другая – для случая дерево–дюралюминий.

### **Указания по проведению наблюдений**

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя.
3. Включите секундомер СЭ-1 в режим 1.
4. Ослабив винт 2 (рис. 5.1), установите плоскость под углом  $25^\circ$  к горизонту, записав его в табл. 5.1. Электромагнит при этом должен находиться в верхней правой части плоскости. Закрепите плоскость в таком положении, зажав винт 2.
5. Поместите брусок (дерево–дюралюминий) на наклонную плоскость деревянной стороной вниз, прижмите торец бруска, на который наклеена металлическая пластина, к электромагниту. Убедитесь, что брусок удерживается в этом положении. В противном случае нажмите кнопку «Стоп».
6. Нажмите кнопку «Пуск» секундомера. При этом происходит одновременное отключение электромагнита и включение секундомера. Выключение секундомера происходит автоматически в момент удара бруска по финишному датчику. Запишите время соскальзывания бруска в табл. 5.1, а затем нажмите кнопку «Сброс».
7. Повторите опыт (п. 4–6) пять раз.

Таблица 5.1

Определение коэффициента трения скольжения  
 для соприкасающихся поверхностей дерево-дерево (либо дерево-дюралюминий)  
 при  $N = 5$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 0.51$ ,  $\theta_t = 0.01$  с,  $\theta_s = 0.002$  м,  $\theta_a = 2.5^\circ$

$\alpha$	$N_0$	$t$	$\bar{t}$	$\Delta t = \beta_{P,N} R_t$	$\overline{\Delta t} = \sqrt{\Delta t^2 + \theta_t^2}$	$\bar{\mu} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2S}{gt^2 \cos \alpha}$	$\overline{\Delta \mu} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\left(1 - \frac{2S \sin \alpha}{gt^2} \frac{\overline{\Delta \alpha}}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{4S \Delta t}{gt^3}\right)^2 + \left(\frac{2 \overline{\Delta S}}{gt^2}\right)^2}$	$\mu = \bar{\mu} \pm \overline{\Delta \mu}$
град		с	с	с	с	–	–	–
25°	1							
	...							
	5							
35°	1							
	...							
	5							
45°	1							
	...							
	5							

Таблица 5.2

Константы эксперимента

$S$ , м	$g$ , м/с <sup>2</sup>
0.522	9.8

8. Повторите п. 4–7 для других углов  $\alpha$ .
9. Повторите п. 4–8, повернув брусок дюралюминиевой поверхностью вниз.
10. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в контейнер для нее.

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулу полной погрешности  $\overline{\Delta\mu}$  в табл. 5.1.
2. Заполните две таблицы по форме табл. 5.1 и рассчитайте коэффициенты трения  $\mu = \bar{\mu} \pm \overline{\Delta\mu}$  для  $N = 5$  и  $P = 95\%$  для каждого угла  $\alpha$  наклона плоскости. Всего должно быть шесть значений коэффициентов трения (по три значения для каждой из двух таблиц). Сравните полученные в опыте значения коэффициентов трения с табличными. Зависит ли коэффициент трения скольжения от угла наклона плоскости?

### Контрольные вопросы

1. Что такое внешнее, внутреннее, сухое и вязкое трение (см. описание исследуемых закономерностей в работе 4н)?
2. Какова классификация видов сухого трения, какова его физическая природа?
3. Что такое трение покоя, как коэффициент трения покоя можно определить экспериментально?
4. Что такое трение скольжения, как рассчитывается сила трения скольжения?
5. Выведите формулу для определения коэффициента трения скольжения в данной работе.
6. Спланируйте эксперимент по определению результирующей силы, действующей на тело массой  $m$ , соскальзывающее с наклонной плоскости длиной  $S$  при фиксированном угле ее наклона. Нужно ли в этом случае знать коэффициент трения между телом и плоскостью и угол ее наклона? Постройте таблицу обработки данных этого опыта выборочным методом или методом переноса погрешностей.

### Работа 6н. ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

**Цель работы:** экспериментальная проверка справедливости основного закона динамики поступательного движения (второго закона Ньютона) путем сопоставления ускорений соскальзывания тела с наклонной плоскости, рассчитанных по кинематической и динамической формулам.

**Приборы и принадлежности.** Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 6.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен брусок 4. Для его удержания используется электромагнит 5, управление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии на СЭ-1 кнопки «Пуск» магнит отключается и включается секундомер, а при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

Пройденное бруском расстояние измеряется по линейке 6, закрепленной вдоль плоскости. На нить 10, перекинутую через блок 8, подвешивается груз 9. Время движения бруска и груза, скрепленных нитью, измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания бруском финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/ «удар», находящимся в ее нижней части слева.

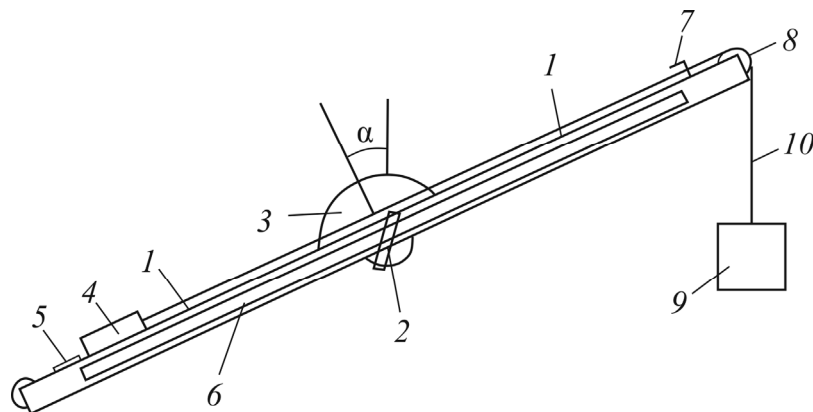


Рис. 6.1

В комплект работы входят брусок, изготовленный из разных материалов (дерево–дюралюминий), и дополнительный груз. Груз и брусок имеют различные массы.

### Исследуемые закономерности

Основной закон динамики поступательного движения, или второй закон Ньютона, может быть записан в разных формах: в терминах ускорения движения тела, в дифференциальной и интегральной форме:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \Delta\mathbf{p} = \int_0^t \mathbf{F} dt,$$

где  $m$  – масса тела;  $\mathbf{a}$  – его ускорение;  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  – результирующая всех внешних сил, действующих на тело;  $\mathbf{p}$  – его импульс;  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$  – измене-

ние импульса тела, интеграл  $\int_0^t \mathbf{F} dt$  называется импульсом силы  $\mathbf{F}$  за время ее действия  $t$ . Сила  $\mathbf{F}$  – это векторная мера взаимодействия тел (скалярной мерой взаимодействия является потенциальная энергия тела  $W_p$ ).

Если на тело действуют постоянные, не зависящие от времени силы, что имеет место в данной работе, то пользуются первой формой второго закона Ньютона. В данной работе исследуется движение бруска массой  $m_1$  вдоль наклонной плоскости, скрепленного с грузом массой  $m_2$  нитью, перекинутой через блок. Если нить нерастяжима, то два скрепленных тела (рис. 6.2) движутся с одинаковым ускорением ( $a_1 = a_2 = a$ ). Если блок, через который перекинута нить, невесомый, то реакции нитей, действующие на тела, одинаковы ( $T_1 = T_2 = T$ ).

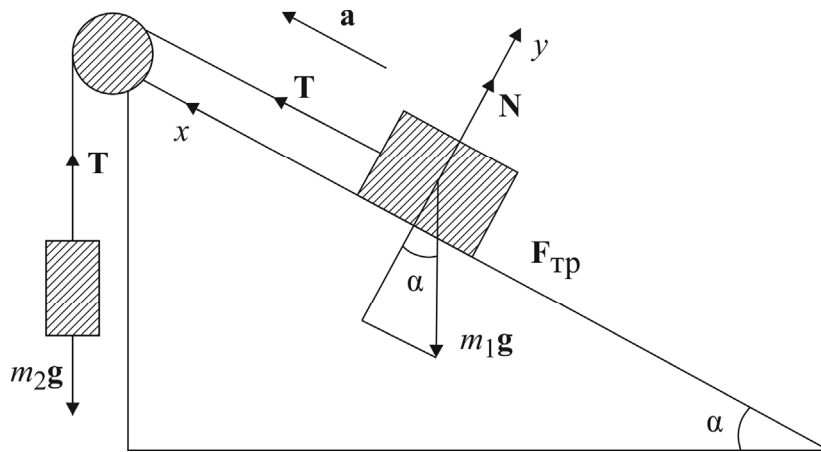


Рис. 6.2

На первое тело системы действуют: сила тяжести  $m_1g$ , реакции наклонной плоскости  $N$  и нити  $T$  и сила трения скольжения  $F_{тр} = \mu N = \mu m_1g \cos \alpha$ , где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения,  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту. На второе тело действуют: сила тяжести  $m_2g$  и реакция нити  $T$ .

Второй закон Ньютона в проекциях на направление ускорения тел для первого и второго тел имеет вид:

$$T - m_1g \sin \alpha - F_{тр} = T - m_1g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = m_1 a \quad m_2g - T = m_2 a.$$

Складывая оба уравнения, получим ускорение их движения

$$a = \frac{g(m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha))}{m_1 + m_2}. \quad (6.1)$$



Если коэффициент трения  $\mu$  бруска о плоскость известен, то, сопоставив ускорение тела  $a$ , рассчитанное по (6.1), с определенным экспериментально  $a = 2S/t^2$ , где  $S$  – путь, проходимый бруском вдоль наклонной плоскости за время  $t$ , можно сделать заключение о выполнимости второго закона Ньютона.

Коэффициент трения  $\mu$  можно определить экспериментально по известному ускорению движения бруска  $a = 2S/t^2$ , расположив, например, наклонную плоскость горизонтально ( $\alpha = 0^\circ$ ). Решив уравнение (6.1) относительно параметра  $\mu$ , получим при  $\alpha = 0^\circ$ :

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \left( 1 - \frac{a}{g} \right) - \frac{a}{g}. \quad (6.2)$$

### Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (по форме табл. 6.1–6.3) для записи результатов наблюдений и параметров установки. Таблицы по форме 6.1 и 6.2 должны быть повторены дважды.

### Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя.
3. Переведите секундомер СЭ-1 в режим 1.
4. Прикрепите нить с грузом к бруску со стороны его деревянного торца.
5. Ослабив винт 2 (рис. 6.1), установите плоскость под углом  $\alpha = 0^\circ$  к горизонту. Перекиньте нить со вторым грузом через блок. Брусок 4 (дерево–дюралюминий) поместите при этом на наклонную плоскость деревянной частью вниз, прикрепив его металлическим торцом к электромагниту, находящемуся в правой части наклонной плоскости. Система «брусок–груз» должна находиться в покое.
6. Нажмите на СЭ-1 кнопку «Пуск» секундомера. При этом одновременно происходит отключение электромагнита и включение секундомера. Выключение секундомера происходит автоматически в момент удара бруска по финишному датчику. Запишите время опускания груза в табл. 6.1, а затем нажмите кнопку «Сброс».
7. Повторите опыт (п. 5, 6) пять раз.

Таблица 6.1

Определение коэффициента трения скольжения для соприкасающихся поверхностей дерево–дерево

(либо дерево–дюралюминий) при угле наклона плоскости  $\alpha = 0^\circ$  при  $N = 5$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 0.51$ ,  $\theta_t = 0.01$  с,  $\theta_s = 0.002$  м,  $\theta_m = 1$  г

№	$t$	$\bar{t}$	$\Delta t = \beta_{P,N} R_t$	$\overline{\Delta t} = \sqrt{\Delta t^2 + \theta_t^2}$	$\bar{a} = 2S/\bar{t}^2$	$\overline{\Delta a} = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2} = \bar{a} \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2}$	$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(1 - \frac{\bar{a}}{g}\right) - \frac{\bar{a}}{g}$	$\overline{\Delta \mu} = \left(1 + \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1}\right) \times \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\bar{a}}{g}\right) \frac{\Delta m}{\bar{m}_1}\right]^2 + \left(\frac{\Delta a}{g}\right)^2}$	$\mu = \bar{\mu} \pm \Delta \mu$
	с	с	с	с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	–	–	–
1									
...									
5									

Таблица 6.2

Определение ускорения соскальзывания тела для соприкасающихся поверхностей дерево–дерево

(либо дерево–дюралюминий) при различных углах  $\alpha$  наклона плоскости при  $N = 5$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 0.51$ ,  $\theta_t = 0.01$  с,  $\theta_s = 0.002$  м

$\alpha$	№	$t$	$\bar{t}$	$\Delta t = \beta_{P,N} R_t$	$\overline{\Delta t} = \sqrt{\Delta t^2 + \theta_t^2}$	$a = \frac{g(m_2 - m_1(\sin \alpha + \bar{\mu} \cos \alpha))}{m_1 + m_2}$	$\overline{\Delta a} = \bar{a} \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2}$	$a = \bar{a} \pm \Delta a$
град		с	с	с	с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>
	1							
	...							
10°	5							
	...							
	5							
40°	1							
	...							
	5							

Таблица 6.3

Константы эксперимента

$m_1$ , г	$m_2$ , г	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$S$ , м
$23 \pm 1$	$29 \pm 1$	9.8	0.522

8. Переверните брусок дюралюминиевой поверхностью вниз и повторите п. 5–7, занося результаты измерений во вторую таблицу по форме табл. 6.1.

9. Установите угол наклона плоскости  $10^\circ$ , наклонив ее со стороны электромагнита. Поместите брусок на наклонную плоскость деревянной стороной вниз, прикрепив его металлическим торцом к электромагниту. Нажимая кнопку «Пуск», измерьте время опускания груза пять раз и запишите в табл. 6.2.

10. Переверните брусок дюралюминиевой поверхностью вниз и повторите п. 9.

11. Меняя угол наклона плоскости от  $10^\circ$  до  $40^\circ$  с шагом  $10^\circ$ , повторите п. 9, 10 для каждого угла наклонной плоскости, занося измерения в таблицы по форме 6.2.

12. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в контейнер для нее.

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулы погрешностей  $\overline{\Delta a}$  и  $\overline{\Delta \mu}$  в табл. 6.1.

2. Заполните две таблицы по форме табл. 6.1 (для случаев дерево–дерево и дерево–дюралюминий) и рассчитайте по ним методом переноса погрешностей коэффициенты трения скольжения бруска о плоскость  $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta \bar{\mu}$  для  $N = 5$  и  $P = 95\%$ .

3. Заполните две таблицы по форме табл. 6.2 (для случаев дерево–дерево и дерево–дюралюминий) и рассчитайте по ним методом переноса погрешностей ускорения соскальзывания тел  $a = \bar{a} \pm \Delta \bar{a}$  для  $N = 5$  и  $P = 95\%$ .

4. Используя табл. 6.2, постройте на миллиметровой бумаге в формате А4 графики теоретических зависимостей ускорения скатывания тела  $a = a(\alpha)$  в зависимости от угла наклона плоскости  $\alpha$ . При расчетах следует использовать значение  $\bar{\mu}$ , определенное в п. 2. На одном листе должно быть два графика для двух таблиц.

5. Нанесите на две эти координатные плоскости экспериментальные точки  $\bar{a} = \bar{a}(\alpha)$ , обозначив их, например, треугольниками, и укажите для каждой из них доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.

6. Сопоставляя на графиках теоретические и экспериментальные значения ускорений соскальзывания тел  $a(\alpha)$  и  $\bar{a}(\alpha)$ , сделайте заключение о выполнении второго закона Ньютона. *Замечание:* два значения физической величины считаются статистически неразличимыми, если среднее (истинное)

значение одного из них попадает в доверительный интервал другого. Если это условие не выполняется, то в опыте присутствует не выявленная систематическая погрешность, и факторы, приводящие к ней, экспериментатор должен выявить. Либо следует сделать заключение об отсутствии соответствия между теорией и опытом.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение (напишите формулы) скорости и ускорения тела. Как они направлены по отношению друг к другу при движении тела по криволинейной и прямолинейной траектории? Сделайте поясняющие рисунки.

2. Что такое сила и каков ее физический смысл?

3. Приведите различные формулировки второго закона Ньютона и объясните смысл входящих в них параметров.

4. Докажите формулы (6.1) и (6.2), показав на рисунке все силы, действующие на брусок и груз в данном опыте.

5. Спланируйте эксперимент по определению результирующей силы, действующей на тело массой  $m$ , скользящее по наклонной плоскости длиной  $S$  при фиксированном угле ее наклона. Нужно ли в этом случае знать коэффициент трения между телом и плоскостью и угол ее наклона? Постройте таблицу обработки данных этого опыта выборочным методом или методом переноса погрешностей.

### Работа 7н. СКАТЫВАНИЕ ТЕЛА С НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

**Цель работы:** проверка выполнимости основного уравнения динамики вращательного движения (уравнения моментов) и закона сохранения механической энергии в опыте по скатыванию круглых тел с наклонной плоскости.

**Приборы и принадлежности.** Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 7.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен цилиндр 4. В комплект работы входят два цилиндра (полый и сплошной) разной массы. Для удержания цилиндра в верхней точке используется электромагнит 5, управление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии на СЭ-1 кнопки «Пуск» магнит отключается и включается секундомер, а при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

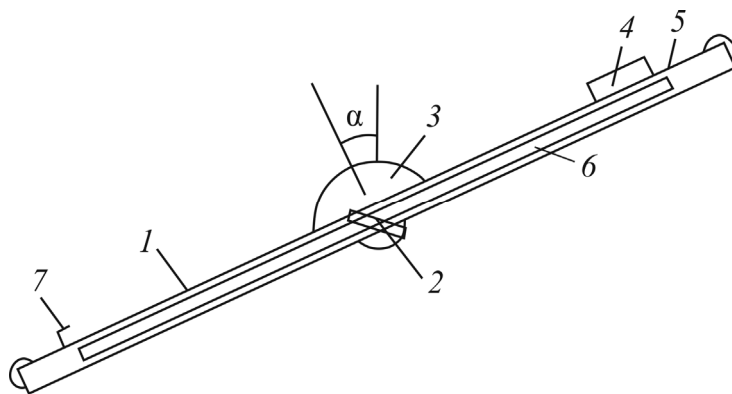


Рис. 7.1

Пройденное цилиндром расстояние измеряется по линейке 6, закрепленной вдоль плоскости. Время скатывания цилиндра измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания цилиндром финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### Исследуемые закономерности

Основной закон динамики вращательного движения, или уравнение моментов, может быть записан в разных формах: в терминах углового ускорения  $\varepsilon$  вращения тела, в дифференциальной и интегральной форме:

$$\mathbf{M} = I\varepsilon, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad \Delta\mathbf{L} = \int_0^t \mathbf{M}dt, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$  – результирующий момент всех внешних сил, действующих на него;  $\mathbf{L}$  – момент импульса тела;  $I$  – момент инерции тела, являющийся аналогом массы или мерой инертности тела при его вращательном движении. Момент импульса тела может быть представлен в виде  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость его вращения. Моменты силы и импульса определяются как векторные произведения  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  и  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , где  $\mathbf{r}$  – положение точек приложения силы  $\mathbf{F}$  и импульса тела  $\mathbf{p}$  относительно произвольной точки  $O$  (полюса).  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  направлены перпендикулярно плоскости перемножаемых векторов и ориентированы по правилу правовинтовой системы.

Все моменты (силы, импульса и инерции) зависят от того, относительно какой произвольной точки (полюса) или оси вращения они рассчитываются. Однако равенство правых и левых частей уравнений (7.1) при этом не нарушается. В справочниках приводятся только моменты инерции  $I_C$  тела относительно осей вращения, проходящих через его центр масс (ЦМ)  $C$ .

В данной работе изучается качение круглых тел по наклонной плоскости, для чего используются сплошной и полый цилиндры с внутренним и внешним радиусами цилиндрической полости, равными  $R_0$  и  $R$ . Момент инерции такого цилиндра относительно его центра масс  $I_C = \frac{m}{2}(R_0^2 + R^2) = kmR^2$ , где  $k = \left[1 + (R_0/R)^2\right]/2$  – коэффициент инерции тела. Для тонкостенного цилиндра  $R_0 = R$  и  $k = 1$ , а для сплошного  $R_0 = 0$  и  $k = 1/2$ .

Если другая ось вращения тела параллельна оси, проходящей через ЦМ тела, и смещена от нее на расстояние  $a$ , то момент инерции тела относительно новой оси вращения рассчитывают по *теореме Штейнера*:  $I = I_C + ma^2$ , где  $m$  – масса тела. В частности, если тело катится по поверхности, то его момент инерции относительно точки  $O$  касания тела и поверхности по теореме Штейнера равен ( $a = R$ ):  $I_O = I_C + mR^2 = (k + 1)mR^2$ .

Существует аналогия между параметрами, описывающими поступательное и вращательное движение тела, которая приведена в таблице:

$S$	$V$	$a$	$m$	<b>P</b>	<b>F</b>
$\Phi$	$\omega$	$\varepsilon$	$I$	<b>L</b>	<b>M</b>

Смысл входящих в таблицу параметров понятен по их обозначениям. Эта аналогия позволяет переходить от уравнений поступательного движения к уравнениям вращательного движения. Так, уравнения  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  и  $W_K = mv^2/2$  переходят в уравнения  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $W_K = I\omega^2/2$ .

Рассмотрим скатывание тела круглой формы с наклонной плоскости. Для описания движения используем первое уравнение (7.1). Считаем, что в точке  $O$  касания тела и плоскости нет проскальзывания. Мгновенная скорость точки  $O$  в этом случае относительно плоскости в любой момент времени равна нулю ( $v_o = 0$ ). Ось вращения, проходящую через такую точку, называют мгновенной осью вращения.

Для описания движения тела возьмем полюс в точке  $O$  – точка касания тела и плоскости (рис. 7.2), через которую проходит мгновенная ось вращения тела (проскальзывание тела относительно плоскости отсутствует). Относительно этой точки моменты сил  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  равны нулю:  $\mathbf{M}_N = 0$ ,  $\mathbf{M}_{\text{тр}} = 0$ , а момент силы тяжести равен  $M_{mg} = mgR \sin \alpha$ . Момент инерции круглого тела относительно

оси  $O$  по теореме Штейнера  $I_0 = (k + 1)mR^2$ , угловое ускорение вращения тела  $\varepsilon = a/R$ . Тогда уравнение вращательного движения тела относительно оси, проходящей через точку  $O$ ,  $M_{mg} = I_0\varepsilon$ , примет вид:  $mgR \sin \alpha = (k + 1)mR^2 a/R$ . Отсюда ускорение скатывания тела  $a = g \sin \alpha / (k + 1)$ .

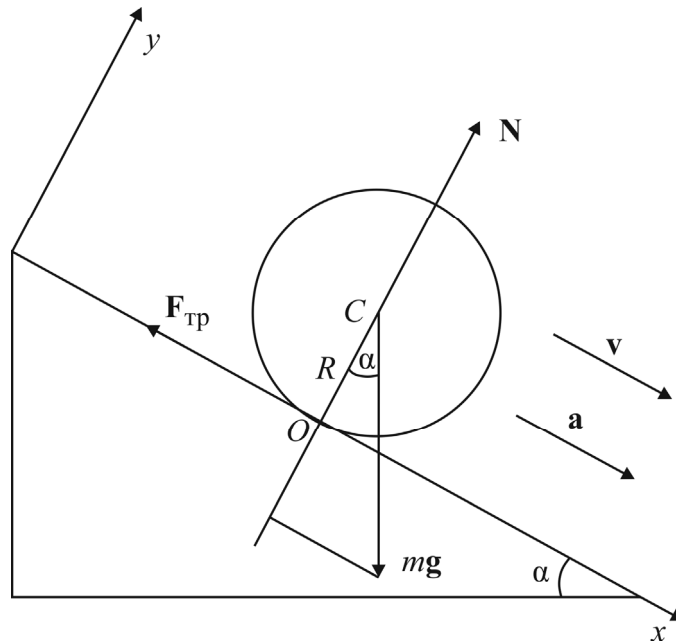


Рис. 7.2

Если выбрать полюс в точке  $C$  (ЦМ тела), то моменты сил  $\mathbf{N}$  и  $mg$  относительно оси, проходящей через точку  $C$ , будут равны нулю:  $\mathbf{M}_N = 0$ ,  $\mathbf{M}_{mg} = 0$ , а момент силы трения сцепления будет равен  $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R$ . Момент инерции тела относительно оси  $C$  равен  $I_C = kmR^2$ , а угловое ускорение его вращения  $\varepsilon = a/R$ . Тогда уравнение вращательного движения тела относительно оси  $C$   $M_{\text{тр}} = I_C\varepsilon$  примет вид  $F_{\text{тр}}R = kmR^2 a/R$ . Отсюда

$$F_{\text{тр}} = kma = kmg \sin \alpha / (k + 1).$$

Силу трения сцепления можно также найти из второго закона Ньютона для ЦМ тела:  $mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma$ . Результат будет таким же.

Найденная сила трения сцепления аналогична силе трения покоя. Как известно, максимальная сила трения покоя  $F_{\text{тр max}} = \mu N$ . В данной задаче  $N = \mu mg \cos \alpha$ . Следовательно,  $F_{\text{тр}} = \frac{kmg \sin \alpha}{k + 1} \leq \mu mg \cos \alpha = F_{\text{тр max}}$ . Отсюда коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью  $\mu \geq k \operatorname{tg} \alpha / (k + 1)$ .

Для описания скатывания тела с наклонной плоскости можно также использовать энергетический подход. Кинетическая энергия катящегося тела, совершающего поступательно-вращательное движение, с учетом  $\omega = v/R$ , а также  $I_C = kmR^2$  и  $I_O = (k+1)mR^2$ , равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{I_O \omega^2}{2} = \frac{(k+1)mv^2}{2}.$$

Работа силы нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$ , а также работа силы трения сцепления  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  (нет проскальзывания, и тепло в точке касания тела и плоскости не выделяется) равны нулю ( $A_N = 0$ ,  $A_{\text{тр}} = 0$ ), поэтому в системе имеет место закон сохранения механической энергии:  $W_p = W_k$  или  $mgh = \frac{(k+1)mv^2}{2}$ .

Отсюда скорость тела, скатившегося с высоты  $h$ , в основании наклонной плоскости равна  $v = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}} = \sqrt{\frac{2gS \sin \alpha}{k+1}}$ , где  $S$  – путь, который тело проходит вдоль наклонной плоскости.

В данной работе по измеренному времени  $t$  скатывания тела с наклонной плоскости определяются его ускорение скатывания  $a = 2S/t^2$  и скорость в конце наклонной плоскости  $v = 2S/t$ , которые сопоставляются с их теоретическими значениями, рассчитываемыми по формулам

$$t = \sqrt{\frac{2S(k+1)}{g \sin \alpha}}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{k+1} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{2gS \sin \alpha}{k+1}}.$$

Затем делается заключение о выполнимости уравнения вращательного движения и закона сохранения механической энергии.

Если параметрам полого ( $k_1 = 0.76$ ) и сплошного ( $k_2 = 0.5$ ) цилиндров (см. табл. 7.4) присвоить индексы 1 и 2 соответственно, а отношение отрезков времени скатывания тел с наклонной плоскости обозначить как  $n = t_1/t_2$ , то, учитывая, что при скатывании тела проходят одинаковый путь  $s = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}$ , получим отношения их ускорений и скоростей для одного и того

же угла наклона плоскости:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{k_1+1}{k_2+1} = n^2 = 1.17$  и  $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{k_1+1}{k_2+1}} = n = 1.08$ .



Эти соотношения также можно использовать для экспериментальной проверки правильности основного уравнения динамики вращательного движения.

### Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (по форме табл. 7.1–7.3) для записи результатов наблюдений и параметров установки. Таблица по форме 7.1 должна быть повторена дважды – для полого ( $m_1, k_1 = 0.76$ ) и сплошного ( $m_2, k_2 = 0.5$ ) цилиндров.

### Указания по проведению наблюдений

1. Заполните первый столбец таблиц по форме табл. 7.1 для времени скатывания цилиндров, предсказываемого теорией, и перейдите к пробной постановке эксперимента. Для этого проведите по два пробных измерения времени скатывания тел с наклонной плоскости для разных углов ее наклона  $\alpha$  (см. далее). Если опытное время скатывания отличается от предсказываемого теорией более чем на 0.05 с, то сообщите об этом преподавателю. И, если это необходимо, по указанию преподавателя повторите эксперимент на другой установке. В противном случае перейдите к более точной постановке эксперимента.

2. Включите установку, нажав на СЭ-1 кнопку «Сеть».

3. Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя.

4. Переведите секундомер СЭ-1 в режим 1.

5. Ослабив винт 2 (рис. 7.1), установите плоскость под углом  $10^\circ$  к горизонту. Включите электромагнит, для этого нажмите кнопку «Стоп» на СЭ-1. Поместите полый цилиндр 4 с массой  $m_1$  на наклонную плоскость, прикрепив его к магниту.

6. Нажмите кнопку «Пуск» секундомера. При этом одновременно происходит отключение электромагнита и включение секундомера. Выключение секундомера происходит автоматически в момент удара цилиндра по финишному датчику. Запишите в табл. 7.1 время соскальзывания бруска, затем нажмите кнопку «Сброс».

7. Повторите опыт (п. 4, 5) пять раз.

8. Повторите опыт (п. 4–6) для других углов от  $15^\circ$  до  $25^\circ$  с шагом  $5^\circ$ . Результаты измерений занесите в табл. 7.1.

9. Повторите п. 4–7 для сплошного цилиндра с массой  $m_2$ . Результаты измерений запишите во вторую таблицу по форме табл. 7.1.

Таблица 7.1

Определение времени  $t$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  скатывания полого (или сплошного) цилиндра

при  $N = 3$ ,  $P = 95\%$ ,  $\beta_{P,N} = 1.30$ ,  $\theta_t = 0.01$  с,  $\theta_s = 0.002$  м

$\alpha$	№ $t$	$t = \sqrt{\frac{2S(k+1)}{g \sin \alpha}}$	$\Delta t = \beta_{P,N} R_t$	$\overline{\Delta t} = \sqrt{\Delta t^2 + \theta_t^2}$	$v = \sqrt{\frac{2gS \sin \alpha}{k+1}}$	$\bar{v} = \frac{2S}{t}$	$\overline{\Delta v} = \bar{v} \times \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$	$v = \bar{v} \pm \overline{\Delta v}$	$a = \frac{g \sin \alpha}{k+1}$	$\bar{a} = \frac{\bar{v}}{t}$	$\overline{\Delta a} = \bar{a} \times \sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$	$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$
град	с	с	с	с	м/с	м/с	м/с	м/с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>
10°	1											
	...											
	5											
...												
25°	1											
	...											
	5											

Таблица 7.2

Определение коэффициента инерции  $k$  полого (или сплошного) цилиндра при  $\theta_\alpha = 2.5^\circ$

$\alpha$	$\bar{k} = \frac{g \sin \alpha}{a} - 1$	$\overline{\Delta k} = \frac{g}{a} \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha \overline{\Delta a}}{a}\right)^2 + (\cos \alpha \overline{\Delta \alpha})^2}$	$k = \bar{k} \pm \overline{\Delta k}$	$k_{\text{теор}}$
10°				0.76
...				или
25°				0.5

Таблица 7.3

Отношение отрезков времени скатывания полого и сплошного цилиндров при одном и том же угле наклона плоскости

$\alpha$	$\bar{n} = \frac{\bar{t}_1}{t_2}$	$\Delta \bar{n} = \bar{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{t}_1}{\bar{t}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{t}_2}{\bar{t}_2}\right)^2}$	$n = \bar{n} \pm \Delta \bar{n}$	$n_{\text{теор}} = \sqrt{\frac{k_1 + 1}{k_2 + 1}}$
10°				
...				
25°				1.08

Таблица 7.4

Константы эксперимента при  $k = \left[1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right] / 2 = \left[1 + \left(\frac{D_0}{D}\right)^2\right] / 2$

$m_1$	$m_2$	$D = 2R$	$D_0 = 2R_0$	$k_1$	$k_2$	$g$	$S$
$\Gamma$	$\Gamma$	см	см	–	–	м/с <sup>2</sup>	м
$30 \pm 1$	$60 \pm 1$	1.95	1.40	0.76	0.5	9.8	0.522

### Задания по обработке результатов эксперимента

1. Выведите формулы полных погрешностей  $\overline{\Delta a}$ ,  $\overline{\Delta v}$ ,  $\overline{\Delta k}$  и  $\overline{\Delta n}$  в методе переноса погрешностей в табл. 7.1–7.3.

2. Заполните две таблицы по форме 7.1 для полого и сплошного цилиндров с массами  $m_1$  и  $m_2$ , рассчитав по ним методом переноса погрешностей значения их экспериментальных ускорений  $a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$  и скоростей  $v = \bar{v} \pm \overline{\Delta v}$  для  $N = 5$  и  $P = 95\%$  и их теоретические значения  $a$ ,  $v$ .

3. Заполните табл. по форме табл. 7.2 и рассчитайте по ним значения коэффициентов инерции  $k = \bar{k} \pm \overline{\Delta k}$  для полого и сплошного цилиндров, сопоставьте их с теоретическими значениями.

4. Занесите в табл. 7.3 отношения  $\bar{n} = \bar{t}_1 / \bar{t}_2$  времени скатывания полого и сплошного цилиндров при одном и том же угле наклона плоскости и рассчитайте методом переноса погрешностей значения  $n = \bar{n} \pm \overline{\Delta n}$  для каждого угла наклона плоскости.

5. Постройте на миллиметровой бумаге формата А4 графики теоретических зависимостей времени скатывания тел  $t = t(\alpha)$  для полого и сплошного цилиндров в зависимости от угла  $\alpha$  наклона плоскости. На одном листе должно быть два графика для каждой из таблиц по форме табл. 7.1.

6. Нанесите на эти координатные плоскости экспериментальные точки  $\bar{t} = \bar{t}(\alpha)$ , обозначив их, например, треугольниками и указав для каждой точки доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.

7. Постройте на миллиметровой бумаге формата А4 графики теоретических зависимостей ускорений скатывания тел  $a = a(\alpha)$  для полого и сплошного цилиндров в зависимости от угла наклона плоскости  $\alpha$ . На одном листе должно быть два графика для каждой из таблиц по форме табл. 7.1.

8. Нанесите на эти координатные плоскости экспериментальные точки  $\bar{a} = \bar{a}(\alpha)$ , обозначив их, например, треугольниками и указав для каждой точки доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.

9. Постройте на миллиметровой бумаге формата А4 графики теоретических зависимостей скоростей тел в основании наклонной плоскости  $v = v(\alpha)$  для полого и сплошного цилиндров в зависимости от угла наклона плоскости  $\alpha$ . На одном листе должно быть два графика для каждой из таблиц по форме табл. 7.1.

10. Нанесите на эти координатные плоскости экспериментальные точки  $\bar{v} = \bar{v}(\alpha)$ , обозначив их, например, треугольниками и указав для каждой точки доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.

11. Постройте на миллиметровой бумаге на координатной плоскости  $(x, y) = (\alpha, n)$  прямую  $n_{\text{теор}} = 1.08$ , параллельную оси  $\alpha$ , и нанесите на эту плоскость по табл. 7.3 экспериментальные точки  $\bar{n} = \bar{n}(\alpha)$ , обозначив их, например, треугольниками и указав для каждой точки доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.

12. Сопоставляя теоретические и экспериментальные значения величин  $a(\alpha)$  и  $\bar{a}(\alpha)$ ,  $v(\alpha)$  и  $\bar{v}(\alpha)$ ,  $n_{\text{теор}} = 1.08$  и  $\bar{n}(\alpha)$  на графиках этих величин, сделайте заключение о выполнимости основного закона динамики вращательного движения и закона сохранения энергии. *Замечание:* два значения физической величины считаются статистически неразличимыми, если среднее (истинное) значение одного из них попадает в доверительный интервал другого. Если это условие не выполняется, то в опыте присутствует не выявленная систематическая погрешность, и факторы, приводящие к ней, экспериментатор должен выявить. Либо следует сделать заключение о несоответствии между теорией и опытом.

### Контрольные вопросы

1. Как называются параметры, входящие в таблицу аналогии поступательного и вращательного движения, приведенную в описании работы?

2. Пользуясь этой таблицей, перейдите от уравнений поступательного движения  $s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{\pm 2a}$  к их аналогам при вращательном движении. Каков смысл знаков ( $\pm$ )?

3. Дайте определения (напишите формулы) угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Одинаковы ли они для разных точек твердого тела относительно параллельных осей вращения?

4. Как определяется направление вектора угловой скорости  $\omega$  вращающегося тела? Сделайте поясняющий рисунок.

5. Как направлены по отношению друг к другу векторы угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$  в случаях подвижной (волчок) и неподвижной осей вращения? Проведите аналогию с направлением векторов скорости  $v$  и ускорения  $a$  тела при его поступательном движении по криволинейной и прямолинейной траекториям. Сделайте поясняющие рисунки.

6. Как связаны между собой линейная скорость  $v$  и ускорение  $a$  (касательное) точки твердого тела с ее угловой скоростью  $\omega$  и ускорением  $\varepsilon$ ?

7. Напишите уравнение векторной связи между линейной и угловой скоростями вращающейся точки. Сделайте поясняющий рисунок.

8. Дайте определения (напишите формулы) момента силы и момента импульса тела относительно точки (полюса) и оси вращения. Как вычисляются длины этих векторов? Сделайте поясняющие рисунки и укажите на них направления векторов.

9. Дайте определение (напишите формулу и сделайте рисунок) момента инерции твердого тела. Каков его физический смысл? Как он вычисляется для круглых симметричных тел?

10. Сформулируйте теорему Штейнера. Сделайте поясняющий рисунок.

11. Выведите формулу для момента инерции полого цилиндра массой  $m$  и внутренним и внешним радиусами его цилиндрической полости, равными  $R_0$  и  $R$  относительно оси вращения, проходящей через его центр масс.

12. Используя табл. 7.4, найдите числовое значение коэффициента инерции  $k$  для полого цилиндра с толстой стенкой.

13. Приведите три формы основного уравнения динамики вращательного движения. Как называются параметры, входящие в него?

14. Выведите формулы для времени и ускорения скатывания круглого тела с наклонной плоскости и его скорости в ее основании.

15. Как вычисляется кинетическая энергия тела, совершающего сложное поступательно-вращательное движение?

16. Почему имеет место закон сохранения механической энергии при качении круглого тела по поверхности без проскальзывания? Будет ли в этом случае выделяться тепло в точке касания тела и плоскости?

17. Спланируйте эксперимент по определению результирующей силы, действующей на тело массой  $m$ , скатывающееся с наклонной плоскости длиной  $S$  при фиксированном угле ее наклона. Нужно ли в этом случае знать коэффициент инерции тела и угол наклона плоскости? Постройте таблицу обработки данных этого опыта выборочным методом или методом переноса погрешностей.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Данные прямых измерений при  $N = \dots, P = 95\%, u_{P,N} = \dots$

№	1	2	3	4	5
$x_i$					
$x_i \uparrow$					$\theta_x =$
$U_{x_i} = x_{i+1} - x_i$					$R_x = x_5 - x_1 =$ $U_x = u_{P,N} R_x =$

Если  $U_{x_i} < U_x$ , то результатов, содержащих грубые погрешности, в выборке нет.

Таблица П.2

Обработка данных прямых измерений выборочным методом при  $N = \dots, P = 95\%, t_{P,N} = \dots, \beta_{P,N} = \dots$

Формула	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i$	$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$	$\Delta x = t_{P,N} S_{\bar{x}}$	$R_x = x_{\max} - x_{\min}$	$\Delta x_{\beta} = \beta_{P,N} R_x$	Либо $\theta_x = \frac{\Delta}{2}$ , либо $\theta_x = \frac{\gamma K}{100}$	$\overline{\Delta x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}$	$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x}$ с $P = 95\%$	$\delta x = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} 100\%$
Результат									

Таблица П.3

Данные прямых и косвенных измерений при  $N = \dots, P = 95\%, u_{P,N} = \dots$

№	1	2	...	$N-1$	$N$
$x_i$					$\theta_x =$
$y_i$					$\theta_y =$
...					...
$f_i = f(x_i, y_i, \dots)$					
$\theta_{f_i} = \theta_f(x_i, y_i, \dots)$					
$f_i \uparrow$					$R_f = x_N - x_1 =$
$U_{f_i} = f_{i+1} \uparrow - f_i \uparrow$					$U_f = u_{P,N} R_f =$

Если  $U_{f_i} < U_f$ , то результатов, содержащих грубые погрешности, в выборке функции нет.

Таблица П.4

Обработка данных косвенных измерений выборочным методом при  $N = \dots, P = 95\%, t_{P,N} = \dots, \beta_{P,N} = \dots$

Формула	$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum f_i$	$S_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{\sum (f_i - \bar{f})^2}{N(N-1)}}$	$\Delta f = t_{P,N} S_{\bar{f}}$	$R_f = f_{\max} - f_{\min}$	$\Delta f_{\beta} = \beta_{P,N} R_f$	$\theta_f = \frac{1}{N} \sum \theta_{fi}$	$\overline{\Delta f} = \Delta f + \theta_f$	$f = \bar{f} \pm \overline{\Delta f}$ с $P = 95\%$	$\delta f = \frac{\overline{\Delta f}}{\bar{f}} 100\%$
$f$									

Таблица П.5

Обработка данных по МНК для зависимости вида  $y = ax$  при  $N = \dots, P = 95\%, t_{P,N-1} = \dots$

$\bar{a} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$	$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} - \bar{a}^2 \right)}$	$\Delta a = t_{P,N} S_{\bar{a}}$	$\theta_x = \frac{1}{N} \sum \theta_{xi}$	$\theta_y = \frac{1}{N} \sum \theta_{yi}$	$\theta_a = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} \times (\bar{a} \theta_x + \theta_y)$	$\overline{\Delta a} = \Delta a + \theta_a$	$y = ax$	$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$ с $P = 95\%$

Таблица П.6

Обработка данных по МНК для зависимости вида  $y = ax + b$  при  $N = \dots, P = 95\%, t_{P,N-1} = \dots$

$\bar{x} = \frac{1}{N} \times \sum x_i$	$\bar{y} = \frac{1}{N} \times \sum y_i$	$\bar{a} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$	$\bar{b} = \frac{\bar{y} - \bar{a}\bar{x}}{-\bar{a}\bar{x}}$	$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \times \left( \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - \bar{a}^2 \right)}$	$S_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \times \sqrt{\left( \bar{x} + \frac{1}{N} \times \sum (x_i - \bar{x})^2 \right)}$	$\Delta a = t_{P,N-1} \times S_{\bar{a}}$	$\Delta b = t_{P,N-1} \times S_{\bar{b}}$	$\theta_x = \frac{1}{N} \times \sum \theta_{xi}$	$\theta_y = \frac{1}{N} \times \sum \theta_{yi}$	$\theta_b = \frac{ \bar{a}  \theta_x + \theta_y}{\theta_a}$	$\overline{\Delta a} = \Delta a + \theta_a$	$\overline{\Delta b} = \Delta b + \theta_b$	$y = ax + b$	$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$	$b = \bar{b} \pm \overline{\Delta b}$



## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Значения коэффициентов Стьюдента  $t_{P, N}$  в зависимости от числа наблюдений  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P, N}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0

Коэффициенты  $\beta_{P, N}$  для расчета доверительной погрешности по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P, N} R$  для числа наблюдений  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P, N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Коэффициенты  $u_{P, N}$  для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P, N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Коэффициенты  $v_{P, N}$  для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P, N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29

Производные элементарных функций:

Функция	Производная	Функция	Производная
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\sin^2 x$
$e^{ax}$	$ae^{ax}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\cos^2 x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$(u+v)'$	$u' + v'$
$\ln x$	$1/x$	$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\sin x$	$\cos x$	$(u/v)'$	$(u'v - uv')/v^2$
$\cos x$	$-\sin x$	$f = f(u(x))$	$f'_x = f'_u u'_x$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2016. 352 с.
2. Морозов В. В., Сobotковский Б. Е., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. 64 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. I. Механика. М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2005. 560 с.

Альтмарк Александр Моисеевич,  
Морозов Вениамин Васильевич,  
Черемухина Ирина Анатольевна

### Механика

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. В. Кузнецова

---

Подписано в печать 28.12.16. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 3,25.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 543 экз. Заказ

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5